

Сведения о выполненных работах в 2019 году
по проекту «Теория глобальных узлов: инварианты и классификация»,
поддержанному Российским научным фондом
Соглашение № 19-41-02005

Руководитель д-р физ.-мат. наук Веснин Андрей Юрьевич

Проект направлен на решение фундаментальной проблемы распознавания и классификации трехмерных многообразий с особенностями, в том числе, с помощью построения и вычисления их инвариантов. Прежде всего, речь идет об исследовании одномерных особенностей, являющихся узлами, зацеплениями, заузленными графами, вложенными в многообразии.

В то время, как классическая теория узлов связана с изучением узлов и зацеплений в трехмерной сфере, под глобальной теорией узлов, следуя академику С.В. Матвееву, понимают теорию узлов в произвольных трехмерных многообразиях. Естественным промежуточным этапом является исследование узлов и зацеплений в утолщенных поверхностях, что соответствует комбинаторной конструкции виртуальных узлов.

Российская команда проекта имеет многолетний успешный опыт сотрудничества с индийской командой в области исследования заузленных графов и виртуальных узлов, отраженный в более чем десяти совместных статьях и препринтах. Ранее были получены совместные результаты о свойствах групп кос и их обобщений, построены новые семейства полиномиальных инвариантов виртуальных узлов, получены оценки для распутывания виртуальных зацеплений (unknotting number), исследованы свойства различных обобщений лево-инвариантного право-дистрибутивного группоида Матвеева, получившего в современной литературе название квандл.

В рамках проекта реализуется комплексный подход к исследованию глобальных узлов, сочетающий в себе топологические, геометрические, комбинаторные и алгебраические методы с доведением теоретических разработок до алгоритмических и вычислительных реализаций. Проект включает в себя три основных направления:

- (А) Построение и вычисление новых инварианты узлов в трехмерных многообразиях, в том числе, инвариантов, связанных с различными операциями распутывания.
- (В) Алгебраические структуры, связанные с глобальными узлами.
- (С) Инварианты геометрических 3-многообразий с особенностями.

За отчетный период получены следующие основные результаты:

(А) Установлены свойства Гордиевых комплексов, соответствующих распутывающим операциям для классических узлов и для виртуальных узлов. В первом случае, это операция региональной смены типов пересечений, а во втором – операция поднятия дуги. В обоих случаях доказано, что Гордиевы комплексы имеют симплексы сколь угодно большой размерности. Для построенных примеров виртуальных узлов были табулированы полиномы Веснина-Каур-Прабхакара.

(B) Доказаны новые свойства алгебраических структур, связанных с глобальными узлами. А именно, построен косой брэйс с биупорядочиваемой (в частности, левоупорядочиваемой) мультипликативной группой, такой, что его аддитивная группа имеет кручение, и потому не является левоупорядочиваемой. Установлено, что мультипликативная группа конечного двустороннего косоуго брэйса с разрешимой аддитивной группой, разрешима. Доказано, что аддитивная группа двустороннего косоуго брэйса с нильпотентной мультипликативной группой, разрешима. Эти результаты дают ответы на три вопроса из Коуровской тетради.

(C) Построена серия примеров узлов в утолщенных поверхностях, допускающих несколько различных примарных разложений. Найдено исчерпывающее описание всех подобных примеров, соответствующих многообразиям сложности, не превосходящей 13.

Исследованы инварианты гиперболических 3-многообразий с особенностями. А именно, в проективной модели гиперболического пространства построен фундаментальный многогранник для узла «восьмерка» с мостом. Выписаны порождающие группы узла как изометрии пространства, задающие отождествление граней фундаментального многогранника. Установлены соотношения между его двугранными углами и длинами ребер. Получен критерий существования гиперболической структуры на дополнении к узлу «восьмерка» с мостом.

Найдена явная формула для числа порождающих деревьев в n -листном циклическом накрытии конечного связного графа. Исследованы арифметические и аналитические свойства соответствующей функции и найдена ее асимптотика при n стремящемся к бесконечности. В частности, установлено, что число порождающих деревьев представляет собой произведение некоторой предписанной константы, кратности накрытия и полного квадрата натурального числа.

Все полученные результаты являются новыми и оригинальными. Они докладывались на международных конференциях и семинарах, в том числе, совместных с индийскими коллегами. По результатам исследований опубликованы статьи, а также препринты, сданные в печать.