

Сведения о выполненных работах в 2021 году  
по проекту «Теория глобальных узлов: инварианты и классификация»,  
поддержанному Российским научным фондом  
Соглашение № 19-41-02005

Руководитель д-р физ.-мат. наук Веснин Андрей Юрьевич

В настоящее время под глобальной теорией узлов, следуя академику С.В. Матвееву, понимают теорию узлов в произвольных трехмерных многообразиях. Данный проект направлен на развитие теории трехмерных многообразий, теории узлов и теории виртуальных узлов в части перечисления этих объектов, построения и исследования свойств их инвариантов. Существенное внимание было уделено развитию теории квандлов (левообратимых идемпотентных праводистрибутивных группоидов), введенных в рассмотрение независимо в работах С.В. Матвеева и Д. Джойса в 80-е годы прошлого века. В последние годы квандлы возникают во многих конструкциях инвариантов узлов, виртуальных узлов и трехмерных многообразий.

Сотрудничество российской и индийской команд проекта имеет многолетнюю историю. Оно начиналось с двусторонних кратковременных визитов и организации совместных конференций и воркшопов. К настоящему времени совместные исследования проводятся в области теории узлов в трехмерных многообразиях, теории групп кос и их обобщений, теории квандлов. Успешность и плодотворность международного сотрудничества подтверждается более чем десятком совместных публикаций.

В рамках проекта реализуется комплексный подход к исследованию глобальных узлов, сочетающий в себе топологические, геометрические, комбинаторные и алгебраические методы с доведением теоретических разработок до алгоритмических и вычислительных реализаций. В отчетный период проект включал три основных направления:

(А) Построение и вычисление новых инвариантов узлов в трехмерных многообразиях. В том числе, инвариантов, связанных с различными операциями распутывания.

(В) Изучение алгебраических структур, в частности групп и квандлов, в контексте построения инвариантов топологических объектов – глобальных узлов.

(С) Исследование трехмерных многообразий и их накрытий в связи с перечислением трехмерных многообразий с геометрической структурой и особенностями.

В 2021 году получены следующие основные результаты:

(А) Разработана новая конструкция построения инвариантов виртуальных и плоско-виртуальных узлов и зацеплений. Метод позволяет строить инварианты по

паре весовых функций, одна из которых является нечетной, а вторая – четной, относительно преобразования Рейдемейстера второго типа. Применяя метод для трех различных операций распутывания и различных нечетных и четных весовых функций, построены новые инварианты виртуальных узлов и зацеплений. Приведены примеры, показывающие, что построенные инварианты являются более сильными, чем F-полиномы виртуальных узлов.

(B1) Построен косой брэйс с абелевой (а потому разрешимой) аддитивной группой и неразрешимой мультипликативной группой. Полученный пример дает ответ на вопрос 19.90: «Существует ли косой брэйс с разрешимой аддитивной группой и неразрешимой мультипликативной группой?»

Доказано, что картографические группы Гротендика распадаются в свободное произведение с объединением. Найдены порождающие некоторой подгруппы, имеющей конечный индекс в картографической группе Гротендика. Из полученного результата следует решение проблемы равенства в картографических группах.

(B2) Квандл является алгебраической системой с бинарной операцией, удовлетворяющей трем аксиомам, которые моделируют три преобразования Рейдемейстера диаграмм узлов. В 2021 году участниками проекта установлены новые соотношения между когомологиями, расширениями и автоморфизмами квандлов. Получена четырехчленная точная последовательность связывающая квандловые 1-коциклы, вторые когомологии и группу автоморфизмов абелева расширения квандлов. Также найдена неабелева часть этой точной последовательности, включающая динамические классы когомологий. Получены приложения к поднятию автоморфизмов квандла. Установлено, что функторы взятия сопрягающего квандла, коре-квандла и обобщенного квандла Александра переводят расширение групп в расширение квандлов. Построен естественный гомоморфизм из второй группы когомологий группы во вторую группу когомологий соответствующих сопрягающего и коре квандлов.

(B3) Разработаны новые процедуры построения биквандла по двум квандлам и их действиям друг на друге. Множество, на котором строится биквандл, является объединением или прямым произведением множеств, на которых построены исходные квандлы. Используя конструкцию биквандла на объединении квандлов построены инварианты для виртуальных узлов и зацеплений. Установлены связи между группами автоморфизмов построенных биквандлов и группами автоморфизмов квандлов, на которых построены эти биквандлы.

(C) Получены несколько вариантов формулы Римана-Гурвица для регулярных разветвленных накрытий графов. Под графом мы понимаем конечный связный мультиграф. Род графа определяется как ранг первой группы гомологий. Мы рассматриваем конечную группу, действующую на графе, возможно с фиксированными и обратимыми ребрами, и соответствующий фактор-граф.

Полученные формулы Римана-Гурвица связывают род графа с родом фактор-графа и порядками стабилизаторов вершин и ребер.

Все полученные результаты являются новыми и оригинальными. Они докладывались на международных конференциях и семинарах, в том числе, совместных с индийскими коллегами. По результатам исследований опубликованы статьи в международных журналах, в том числе, относящихся к первой четверти. Пять публикаций отчетного периода являются совместными с индийскими коллегами.