

Сведения о выполненных работах в 2020 году
по проекту «Теория глобальных узлов: инварианты и классификация»,
поддержанному Российским научным фондом
Соглашение № 19-41-02005

Руководитель Веснин Андрей Юрьевич, д-р физ.-мат. наук

В настоящее время под глобальной теорией узлов, следуя академику С.В. Матвееву, понимают теорию узлов в произвольных трехмерных многообразиях. Данный проект направлен на развитие теории трехмерных многообразий, теории узлов и теории виртуальных узлов в части перечисления этих объектов, построения и исследования свойств их инвариантов. Существенное внимание было уделено развитию теории квандлов (левообратимых идемпотентных праводистрибутивных группоидов), введенных в рассмотрение в работах С.В. Матвеева и Д. Джойса в 80-е годы прошлого века. В последние годы квандлы возникают во многих конструкциях инвариантов узлов, виртуальных узлов и трехмерных многообразий.

Сотрудничество российской и индийской команд проекта имеет многолетнюю историю. Оно начиналось с двусторонних кратковременных визитов и организации совместных конференций и воркшопов. К настоящему времени совместные исследования проводятся в области теории узлов в трехмерных многообразиях, теории групп кос и их обобщений, теории квандлов. Успешность и плодотворность международного сотрудничества подтверждается более чем десятком совместных публикаций.

В рамках проекта реализуется комплексный подход к исследованию глобальных узлов, сочетающий в себе топологические, геометрические, комбинаторные и алгебраические методы с доведением теоретических разработок до алгоритмических и вычислительных реализаций. В отчетный период проект включал три основных направления:

(А) Построение и вычисление новых инвариантов узлов в трехмерных многообразиях. В том числе, инвариантов, связанных с различными операциями распутывания.

(В) Изучение алгебраических структур, в частности групп и квандлов, в контексте построения инвариантов топологических объектов – глобальных узлов.

(С) Исследование трехмерных многообразий и их накрытий в связи с перечислением трехмерных многообразий с геометрической структурой и особенностями.

За отчетный период получены следующие основные результаты.

(А) Локальное преобразование скручивания для диаграмм узлов со спайками является аналогом преобразования виртуализации для диаграмм виртуальных узлов. Показано, что это преобразование является распутывающим преобразованием для узлов со спайками. Таким образом, оно приводит к инварианту узлов со спайками, который был назван числом скрученного распутывания. Получены нижние и верхние

оценки числа скрученного распутывания в терминах других распутывающих операций узлов со спайками.

(В) Вычислены группы внешних гомологий циклических групп порядка 3 и 4. Установлено, что для произвольной группы G и G -модуля A существует гомоморфизм симметрической группы гомологий $SH(G, A)$ на группу внешних гомологий $H(G, A)$. Доказано, что если квандл Q вложим в ассоциированную подгруппу $G(Q)$, то Q является (G, A) -квандлом для подходящей группы G и ее подмножества A . Классифицированы конечные квандлы с ассоциированной подгруппой, изоморфной свободной абелевой группе ранга 2. Как следствие доказано, что существует бесконечно много попарно неизоморфных квандлов с одной ассоциированной группой. Доказано, что всякий диэдральный квандл порядка $2n$ является объединением двух диэдральных квандлов порядка n . Доказано, что существует бесконечно много попарно неизоморфных квандлов с одной ассоциированной группой. Доказано, что если Q коммутативный, латинский или простой квандл, то он является (G, A) -квандлом.

(С) Классическая теория униформизации с помощью кристаллографических групп была использована для описания и подсчета накрытий над трехмерными евклидовыми многообразиями. Указанные задачи были решены для ориентируемых евклидовых многообразий, однозначно определяемых своими первыми группами гомологий $H_1(G_3) = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$ и $H_1(G_5) = \mathbb{Z}$. С точностью до изоморфизма классифицированы подгруппы конечного индекса в фундаментальных группах указанных многообразий. Найдено число подгрупп и классов сопряженных подгрупп, построены соответствующие им порождающие ряды Дирихле.

Все полученные результаты являются новыми и оригинальными. Они докладывались на международных конференциях и семинарах, в том числе, совместных с индийскими коллегами. По результатам исследований опубликованы статьи в международных журналах, в том числе, относящихся к первой четверти. Пять публикаций отчетного периода являются совместными с индийскими коллегами.