

Сведения о выполненных работах 2021 году  
по проекту «**Эконометрические и вероятностные методы для анализа  
финансовых рынков сложной структуры**»,  
поддержанному Российским научным фондом

Соглашение № 20-61-47043

Руководитель: канд. физ.-мат. наук Пчелинцев Евгений Анатольевич

В ходе выполнения работ в отчетном периоде:

– развита теория синтеза и анализа оптимальных финансовых стратегий в явной форме для проблем оптимального потребления и инвестирования на финансовых рынках, задаваемых стохастическими дифференциальными уравнениями со скачкообразными компонентами, определяемыми процессами Леви в двух постановках: на рынках без операционных издержек и на рынках с издержками. На основе метода стохастического динамического программирования и проверочных теорем были построены оптимальные стратегии в явном виде. Анализ операционных издержек был проведен на основе подхода Леланда–Лепинетта. Полученные теоретические результаты были проиллюстрированы практически численными Монте–Карло моделированиями. Численный анализ подтвердил достоверность полученных теоретических результатов на практике.

– разработаны методы построения стратегий оптимального потребления и инвестирования для логарифмических функций полезности на финансовых рынках спредов, определяемых многомерными процессами Орнштейна–Уленбека. Для таких задач на основе метода стохастического динамического программирования и с помощью специальных проверочных теорем построены оптимальные стратегии в явном виде;

– разработаны вероятностные методы актуарного анализа страховых моделей с инвестициями в финансовые рынки Блэка–Шоулса со случайными коэффициентами, управляемыми скрытыми марковскими цепями, определяющими переключения режимов. Получены конструктивные условия на модели рынка, при которых найдена асимптотическая форма для вероятности разорения. Были проанализированы условия, при которых вероятность разорения страховых компаний равна единице при любых объемах начальных инвестиций;

– на основе точных оракульных неравенств, методов нижних границ Ван–Триса и взвешенных методов наименьших квадратов Пинскера установлена асимптотическая эффективность адаптивных процедур выбора моделей для проблем робастной непараметрической калибровки по дискретным данным финансовых рынков, задаваемых стохастическими дифференциальными уравнениями с импульсными компонентами, определяемыми на основе фрактальных пуассоновских процессов, сохраняющих зависимость на длительных временных промежутках. При этом проанализированы условия на частоту поступления наблюдений, обеспечивающие свойство эффективности. Проведены также численные

эксперименты по методу Монте-Карло, подтверждающие достоверность полученных теоретических результатов на практике;

– проанализированы непараметрические диффузионные рыночные модели, найдены условия, при которых усеченные последовательные процедуры выбора моделей, построенные по дискретным наблюдениям, являются эффективными в адаптивной постановке - при условии отсутствия информации о гладкости коэффициентов в модели. Свойство эффективности устанавливается на основе точных оракульных неравенств с помощью метода нижних границ Ван–Триса и взвешенного метода наименьших квадратов. Проанализированы условия на частоту поступления наблюдений, обеспечивающие свойства эффективности для синтезированных процедур;

– на основе весовых улучшенных оценок наименьших квадратов разработаны адаптивные методы выбора моделей для задач непараметрической калибровки финансовых рынков, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями на основе процесса Орнштейна–Уленбека–Леви с неизвестными распределениями без дополнительных условий на импульсные характеристики моделей рынков. При этом статистические процедуры построены на основе наблюдений в дискретные фиксированные моменты времени. В частности, рассматриваются модели с неограниченным числом импульсных возмущений в динамике финансовых индексов. Проанализирован эффект улучшения неасимптотической среднеквадратической точности равномерно по частоте поступления. Найдены условия на модель рынка, при которых доказана оптимальность предложенных статистических процедур в смысле неасимптотических точных оракульных неравенств;

– полученные статистические методы применены к задачам статистического оценивания для финансовых рынков, определяемых системами больших данных (Big Data), когда число неизвестных параметров модели существенно превосходит число наблюдений стоимостей рискованных активов. Для таких моделей впервые построены оптимальные в смысле оракульных неравенств оценки, не использующие ни параметрическую размерность, ни условие разреженности модели, ограничивающие число ненулевых параметров. Все полученные теоретические результаты подтверждены численными моделированиями по методу Монте–Карло, а также подтверждена работоспособность построенных процедур на практике;

– предложены универсальные цифровые имитаторы стохастических моделей финансовых рынков с произвольным вероятностным распределением, позволяющие генерировать стоимости рискованных активов на временных интервалах произвольной длины. В качестве математического представления моделируемых финансовых индексов используются марковские цепи. Параметры указанных марковских моделей определяются по заданной плотности вероятности или по имеющейся экспериментальной выборке наблюдений;

– разработан метод скорейшего обнаружения моментов существенного изменения характеристик финансовых временных рядов, определяемых случайными

процессами авторегрессионного типа. Построены оценки неизвестных параметров с заданным среднеквадратическим отклонением в моделях, задаваемых обобщенным процессом пороговой авторегрессии;

– проведены исследования по влиянию финансовых рынков на деловую активность страховых компаний. В частности, получены и опубликованы результаты об асимптотике вероятности разорения страховой компании, инвестирующей резерв в рисковый актив, динамика цен, которого описывается моделями, параметры которой зависят от телеграфного сигнала или, более общо, скрытого марковского процесса с конечным числом состояний. В отличие от моделей без инвестиций, где вероятность разорения убывает экспоненциально, финансовые активы существенно меняют характер асимптотики. При определённых значениях параметров она становится степенной с показателем, который находится как решение некоторого алгебраического уравнения. При достаточно высоких значениях волатильности разорение происходит с вероятностью единица. Получены результаты об асимптотике вероятности разорения в модели Спарре Андерсена с инвестициями;

– рассмотрен уникальный набор данных из 144 бирж, активных с первого квартала 2018 года по первый квартал 2021 года, проанализированы факторы, определяющие решение о закрытии биржи, используя методы кредитного скоринга и машинного обучения. Уровни кибербезопасности, наличие публичной команды разработчиков, возраст биржи и количество доступных торгуемых криптовалют являются основными значимыми ковариациями в различных спецификациях моделей. Эти результаты являются надёжными в отношении включения дополнительных переменных с учетом страны регистрации этих бирж и того, являются ли они централизованными или децентрализованными;

– используя ежемесячные данные по 79 регионам России за период с 2003 по 2017 год изучена долгосрочная взаимосвязь розничных цен на бензин с ценой на сырую нефть и номинальным обменным курсом. Существует асимметричная зависимость между ценой на бензин и обменным курсом, которая со временем снизилась, и эти результаты также сохраняются после нескольких проверок надёжности. Показано, что влияние обменного курса на цены на бензин гораздо сложнее контролировать, чем цены на нефть, и они требуют более широкого набора политических мер;

– построены квази-аналитические решения слоистых уравнений теплопроводности и рассмотрены соответствующие задачи финансовой математики. Показано, что решение соответствующих слоистых уравнений может быть получено через решение системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Построены новые интегральные преобразования - осциллирующие интегральные преобразования, которые переводят некоторый дифференциальный оператор второго порядка с разрывными коэффициентами в алгебраический. Для соответствующих преобразований построены формулы обращения, с помощью которых можно явно решать слоистое уравнение теплопроводности;

– анализируя результативность активных взаимных фондов США, рассмотрены спред между корпоративными облигациями (ВАА по рейтингу Moody's) и безрисковыми облигациями с рейтингом AAA и спред между 10-летними и 3-месячными облигациями. Их влияние оказалось значимым, что представляет интересный результат, поскольку управляющие портфелями акций не всегда учитывают ожидаемое движение процентных ставок. Это особенно актуально для менеджеров с длительным инвестиционным горизонтом;

– сформулированы основные принципы применения методологии моделей трехсторонних рынков (потребители, производители, медиакомпания) к задаче исследования рекламной динамики. На базе этих принципов построены модели динамики трехстороннего рынка в зависимости от особенностей рекламного убеждения. Так, для краткосрочного рекламного убеждения корректно использовать динамику, подобную таковой для моделей Сети и Видаля–Вольфа, а для долгосрочного – гудвилл-модели. Динамика гудвилла в разработанных в 2021 году моделях представляет собой обобщение модели Нерлова–Эрроу. При этом ключевым элементом, соответствующим методологии построения трехсторонних моделей, является наличие антигудвилла. Поведение потребителей в силу их определяется функцией спроса, зависящей от гудвилла двух типов: «обычного» гудвилла, действующего позитивно на полезность от товара, и «антигудвилла», снижающего полезность от контента. Динамика «товарного» гудвилла определяется стандартной моделью Нерлова–Эрроу, а динамика «контентного» анти-гудвилла качественно оценивает раздражение потребителя от заполняющей медиаконтент рекламу, имеющее накопительный характер и угасающее после того, как реклама пропадает. Динамика естественным образом обобщается на стохастический случай за счет добавления к приращению гудвиллов обоих типов, что при постоянном уровне рекламы порождает для гудвилла обоих типов динамику, соответствующую процессу Орнштейна-Уленбека.