

Сведения о выполненных работах и
полученных научных результатах в 2024 году
по проекту «Алгебры и коалгебры инцидентности, их автоморфизмы и
дифференцирования»,
поддержанному Российским научным фондом

Соглашение № 23-21-00375

Руководитель: д-р физ.-мат. наук Крылов Пётр Андреевич

В рамках исполнения проекта проводились работы по изучению автоморфизмов и дифференцирований алгебр и коалгебр инцидентности и некоторых связанных вопросов. В результате второго года выполнения работ были получены следующие результаты.

1. Доказано, что если алгебры инцидентности $I(X, R)$ и $I(Y, S)$ удовлетворяют условию (2), то любой изоморфизм между ними индуцирует изоморфизм частично упорядоченных множеств, ассоциированных с предупорядоченными множествами X и Y . Если дополнительно кольцо R удовлетворяет (n, m) -условию, то всякий изоморфизм между $I(X, R)$ и $I(Y, S)$ индуцирует изоморфизм предупорядоченных множеств X и Y . Для алгебр инцидентности $I(X, R)$ и $I(Y, S)$, удовлетворяющих условию (2), доказано, что всякий изоморфизм между ними равен композиции диагонального изоморфизма из $I(X, R)$ в $I(Y, S)$ и внутреннего автоморфизма алгебры $I(Y, S)$.

2. Доказано, что всякое дифференцирование алгебры $I(X, R)$ является суммой внутреннего, аддитивного и кольцевого дифференцирований.

3. Основной результат об аддитивных дифференцированиях алгебры инцидентности $I(X, R)$ утверждает, что подмодуль внутренних аддитивных дифференцирований выделяется в $\text{Der}(I(X, R))$ прямым слагаемым. При этом дополнительное слагаемое состоит из дифференцирований, аннулирующих ребра фиксированного остовного дерева T графа X . В качестве следствий найдено несколько критериев того, чтобы данное аддитивное дифференцирование было внутренним. Пусть множество X является конечным связным и частично упорядоченным и центр $C(R)$ кольца R - поле. При таких предположениях размерности пространства всех аддитивных дифференцирований и пространства аддитивных внешних дифференцирований выражены через следующие инварианты графа X : число ребер, цикломатическое число и ранг некоторой матрицы циклов длины три.

4. Для коалгебры $\text{Co}(X, R)$, где X – частично упорядоченное множество, R – поле, определены внутренние, мультипликативные и порядковые автоморфизмы. Установлено, что они соответствуют внутренним, мультипликативным и порядковым автоморфизмам соответственно алгебры инцидентности $I(X, R)$. Доказано, что каждый автоморфизм коалгебры $\text{Co}(X, R)$ является произведением внутреннего, мультипликативного и порядкового автоморфизма.

5. Введены внутренние дифференцирования и аддитивные дифференцирования коалгебры $Co(X, R)$ и доказано, что каждое дифференцирование коалгебры $Co(X, R)$ записывается как сумма внутреннего дифференцирования и аддитивного дифференцирования.

6. Найдены автоморфизмы и дифференцирования полугрупповой алгебры наследственной биалгебры инцидентности B и наследственной алгебры Хопфа инцидентности H , которые являются автоморфизмами или дифференцированиями самой биалгебры B или алгебры H соответственно.

7. Найден канонический изоморфизм между тензорным произведением алгебры инцидентности $I(X, R)$ на групповую алгебру $R[G]$ и групповой алгеброй $I(X, R)[G]$. Найден также канонический инъективный гомоморфизм из групповой алгебры $I(X, R)[G]$ в алгебру инцидентности $I(X, R[G])$. Если G – конечная группа или X – конечное множество, то получаем изоморфизм. Установлено, что тензорное произведение коалгебр инцидентности будет коалгеброй инцидентности.