

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан
Л.В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Функциональный анализ

по направлению подготовки

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Форма обучения

Очная

Квалификация

**Математик. Преподаватель / Математик. Вычислитель /
Исследователь в области математики и компьютерных наук**

Год приема

2024

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

ООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

ООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Задачи освоения дисциплины

Формирование у студента прочных теоретических знаний по функциональному анализу и практических навыков использования методов функционального анализа в решении конкретных научных и практических задач.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Пятый семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Математический анализ», «Алгебра», «Теория множеств», «Дифференциальные уравнения».

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:

-лекции: 48 ч.

-практические занятия: 48 ч.

в том числе практическая подготовка: 0 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Линейные нормированные пространства

Определения и свойства. Примеры ЛНП. Полнота.

Тема 2. Линейные ограниченные операторы

Норма линейного ограниченного оператора. Полнота пространства $L(E, F)$. Изоморфизм всех n -мерных ЛНП.

Тема 3. Линейные ограниченные функционалы
Норма линейного ограниченного функционала. Теорема Хана-Банаха и следствия из нее.

Тема 4. Принцип равномерной ограниченности
Теорема Банаха-Штейнгауза. Естественная изометрия и признак ограниченности множества в ЛНП.

Тема 5. Принцип открытости отображения
Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.

Тема 6. Вполне непрерывные операторы
Относительная компактность. Критерий относительной компактности в полных пространствах (теорема Хаусдорфа). Сумма, произведение на скаляр и композиция вполне непрерывных операторов. Предел последовательности вполне непрерывных операторов. Теорема Арцела-Асколи.

Тема 7. Гильбертовы пространства
Скалярное произведение и его свойства. Неравенство Коши-Буняковского.

Тема 8. Геометрия гильбертовых пространств
Теорема о наилучшем приближении. Теорема о проекции. Теорема Риса об общем виде функционала.

Тема 9. Ортонормированные системы
Теорема Шмидта об ортогонализации.

Тема 10. Базисы и ряды Фурье в гильбертовом пространстве
Экстремальное свойство многочлена Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость.

Тема 11. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве
Существование и единственность сопряженного оператора, его свойства. Самосопряженные операторы и их свойства.

Тема 12. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве
Вполне непрерывность сопряженного оператора. Вполне непрерывность оператора Фредгольма.

Тема 13. Спектральная теория ограниченных операторов
Спектр и резольвента, классификация спектра. Непустота и компактность спектра. Спектр сопряженного и самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Спектр вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.

Тема 14. Уравнения Риса-Шаудера
Существование и единственность решения. Теоремы Фредгольма. Теорема Гильберта-Шмидта и ее применение к решению уравнений Риса-Шаудера. 1-я и 2-я формулы Гильберта-Шмидта. Теорема о неподвижной точке и ее применение к решению уравнений Риса-Шаудера и уравнений Вольтерры.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине осуществляется путем контроля посещаемости, контроля выполнения индивидуальных домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Оценочные материалы текущего контроля размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в пятом семестре проводится в устной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов (первый – из общей теории ЛНП, второй – из теории гильбертовых пространств) и одной задачи. Продолжительность подготовки к экзамену не более 2 часов.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «iDO» - <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=648>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План практических занятий по дисциплине.

Занятие 1-3. Линейные нормированные пространства. Свойства нормы.

Занятие 4-6. Сходимость в ЛНП.

Занятие 7-9. Нахождение нормы линейных функционалов.

Занятие 10-11. Решение уравнений Фредгольма с вырожденным ядром.

Занятие 12. Нахождение элемента наилучшего приближения.

Занятие 13. Нахождение сопряженного оператора.

Занятие 14-18. Спектр линейного оператора.

Занятие 19-20. Решение уравнений Фредгольма с симметричным ядром.

Занятие 21-23. Формулы Гильберта-Шмидта.

Занятие 24. Теорема о неподвижной точке.

г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Для качественного освоения дисциплины необходимо постоянно работать с конспектами лекций, и сразу выполнять все задания по лекции (это проверка простых фактов, повторение определений, доказательство простейших утверждений, выводы следствий из доказанных теорем). Кроме этого, самостоятельная работа студентов состоит в более глубоком изучении разделов дисциплины с помощью основной и дополнительной литературы. Индивидуальные задания рекомендуется решать сразу после того, как аналогичные задания были разобраны на практических занятиях.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Краткий курс функционального анализа. Санкт-Петербург, «Лань», 2009. 270 с.
2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: физматлит, 2009. 570 с.
3. Кириллов А. А. Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. 2-е изд. - М.: Наука, 1988. - 400 с.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. - 496 с.
5. Сибиряков Г.В. Введение в теорию пространств Банаха. - Томск: Изд-во Томск. ун-та,

1982. - 82 с.
6. Хатсон В., Пим Дж. С. Приложения функционального анализа и теории операторов. - М.: Мир, 1983. - 432 с.
 7. Антонец А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. - Минск: Издательство «Университетское», 1984. - 351 с.
 8. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. - М.: Наука, 1975. - 302 с.
 9. Н.В. Филимонова. Конспект лекций по функциональному анализу. Санкт-Петербург, «Лань», 2015. 168 с.
 10. А.Г. Порошкин. Лекции по функциональному анализу. М.: Вузовская книга, 2007. 431 с.

б) дополнительная литература:

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1977. - 360 с.
2. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 448 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 896 с.
4. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. - М.: Мир, 1970. - 352 с.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974. - 480 с.
6. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. - К.: Вища школа, 1990. - 600 с.

в) задачки.

1. Антонец А.Б., Князев П.Н, Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - Минск: Вышэйшая школа, 1978. - 205 с.
2. Краснов М.Л. Киселев А.И. Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 192 с.
3. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - М.: Наука, 1984. - 256 с.

г) ресурсы сети Интернет:

1. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>
2. Общероссийский математический портал Math-Net.Ru <http://www.mathnet.ru>

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

– Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>

– ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>

– ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Гензе Леонид Владимирович, к.ф.-м.н., доцент каф. математического анализа и теории функций