

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Теория чисел

по направлению подготовки / специальности

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Современная математика и математическое моделирование

Форма обучения
Очная

Квалификация
Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь

Год приема
2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- тест №1 «Основы теории чисел» (РООПК 1.2, РООПК 1.3);
- тест №2 (РООПК 1.2, РООПК 1.3);
- контрольные работы №1-№3 (РООПК 1.2, РООПК 1.3);
- рефераты «Основоположники теории чисел», «Работы П.Л. Чебышева в теории чисел», «Примеры применения теории чисел в криптографии». «Работы К.Ф. Гаусса в теории чисел» (РООПК 1.2).

Тест №1 (РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Примеры задач.

1) Выберите верные утверждения:

- а) Тернарная проблема Гольдбаха решена в 2013 г.
- б) Неизвестно, бесконечно ли множество простых чисел Мерсенна.
- в) Найдено несколько десятков простых чисел Ферма.

Ответ: а), б).

2) Выберите верные утверждения:

- а) По модулю n существует первообразный корень $\Leftrightarrow n = 2, 4, p^a, 2p^a$, где a из $\mathbb{N}$, а p – нечетное простое натуральное число.
- б) По модулю n существует первообразный корень $\Leftrightarrow n = 2, 4, p^a$, где a из $\mathbb{N}$, а p – нечетное простое натуральное число.
- в) По модулю n существует первообразный корень $\Leftrightarrow n = 2, 4, p$, где p – нечетное простое натуральное число.
- г) По модулю n существует первообразный корень $\Leftrightarrow n = 2, p^a$, где a из $\mathbb{N}$, а p – нечетное простое натуральное число.

Ответ: а).

Тест с ограничением по времени – 90 минут и одна попытка. Всего в тесте предложено 14 задач с оценкой от 1 до 10 баллов. Максимальная оценка за тест – 44 балла. Тест считается пройденным, если учащийся получил не менее 22 баллов.

Тест №2 (РООПК 1.2, РООПК 1.3). Более сложный, требующий не только владения основными понятиями, но и их применения на практике, решение задач.

Примеры задач.

1) Пусть $1, 1 + p, \dots$ – арифметическая прогрессия, где p – простое натуральное число. Выберите верные утверждения:

а) В этой прогрессии содержится бесконечное множество простых чисел.
б) каждое простое натуральное число содержится в подобной прогрессии при некотором p .

в) При фиксированном натуральном p подобная прогрессия содержит все множество простых натуральных чисел.

Ответ: а).

2) Укажите последнюю цифру числа 7^{2023} .

а) 1; б) 9; в) 7; г) 3; д) 2; е) 5.

Ответ: г).

Тест с ограничением по времени – 80 минут и одна попытка. Всего в тесте предложено 22 задачи с оценкой 2 балла. Максимальное количество баллов по тесту – 44. Тест считается пройденным, если учащийся получил не менее 22 балла.

Примерные темы рефератов (РООПК 1.2): «Методы теории чисел в криптосистеме RSA», «Основоположники теории чисел», «Работы П.Л. Чебышева в теории чисел», «Примеры применения теории чисел в криптографии». «Работы К.Ф. Гаусса в теории чисел».

Контрольные работы (РООПК 1.2, РООПК 1.3). Предусмотрены 3 контрольные работы, которые необходимо выполнить самостоятельно в течении семестра.

Примеры задач.

1) Найдите сумму и число всех натуральных делителей следующих чисел:

а) 365; б) 870; в) 1061.

Ответ. а) 4, 444. б) 16, 2160. в) 2, 1062.

2) Решить уравнение $417x - 22y = 378$ при помощи а) сравнений и б) цепных дробей.

Ответ: $x = 18 + 22t$, $y = 324 + 417t$, где $t \in \mathbb{Z}$.

3) Разложите в непрерывную дробь число $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$.

Ответ $[1, (2, 2, 2, 1, 12, 1)]$.

За решение задач начисляются баллы от 0 до 100.

Оценка «отлично» выставляется за 81–100 баллов, «хорошо» выставляется при получении 61–80 баллов, «удовлетворительно» выставляется за 45–60 баллов, «неудовлетворительно» выставляется при получении менее 44 баллов.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в шестом семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос и две задачи, проверяющих РООПК 1.1 и РООПК 1.3. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Вопросы для зачета. В экзаменационном билете представлены также примеры и задачи, в том числе рассмотренные на лекциях.

1) Мультипликативность функции $\tau(n)$. Доказать, что если $n = p^\alpha \dots q^\gamma$ – каноническое разложение числа n , то $\tau(n) = (\alpha + 1) \dots (\gamma + 1)$.

2) Мультипликативность функции $\sigma(n)$. Доказать, что если $n = p^\alpha \dots q^\gamma$ – каноническое разложение числа n , то $\sigma(n) = [(p^\alpha - 1) \dots (q^\gamma - 1)] / [(p - 1) \dots (q - 1)]$.

3) Примеры совершенных чисел. Доказать, что четное число n является совершенным тогда и только тогда, когда $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$, где $a \geq 2$ и $2^a - 1$ – простое число.

4) Доказать, что если $2^a - 1$ – простое число, то число a также простое.

5) Докажите мультипликативность функции Мебиуса $\mu(n)$.

- 6) Докажите формулу для функции Эйлера $\varphi(n)$.
- 7) Докажите теорему о разрешимости в $\mathbb{Z}$ уравнения $ax + by = c$, где a, b, c – целые числа и $ab \neq 0$.
- 8) Докажите, что если $[a_0, \dots, a_n]$ – цепная дробь, то для каждого $k \leq n$ справедливо равенство $P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (-1)^{k-1}$, где $P_0 = a_0$, $P_1 = a_0 a_1 + 1, \dots$, а $P_k = P_{k-1} a_k + P_{k-2}$, $Q_k = Q_{k-1} a_k + Q_{k-2}$ при $2 \leq k \leq n$.
- 9) Докажите китайскую теорему об остатках.
- 10) Докажите мультипликативность функции Эйлера $\varphi(n)$.
- 11) Докажите, что:
если a – квадратичный вычет по модулю p , то $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$;
если a – квадратичный невычет по модулю p , то $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$.
- 12) Докажите, что число 3 является первообразным корнем по модулю 7, а по модулю 8 первообразных корней нет.
- 13) Докажите, что если число Мерсенна $2^n - 1$ является простым, то и число n также простое.
- 14) Докажите, что если a, b – взаимно простые натуральные числа и $ab = c^n$, где $n \geq 2$, $c \in \mathbb{Z}$, то $a = x^n$, $b = y^n$ для некоторых целых чисел x, y .
- 15) Приведите по крайней мере два различных доказательства теоремы Евклида о бесконечности множества простых чисел.
- 16) Докажите, что $\sum \mu(d) = 1$, если $n = 1$ и $\sum \mu(d) = 0$, если $n > 1$, где d пробегает все натуральные делители числа n .
- 17) Докажите, что для всякого натурального числа справедлива формула $n = \sum \varphi(d)$, где d пробегает все натуральные делители числа n .
- 18) Докажите, что если $x > 0$ – действительное число, то число всех целых чисел в интервале $[1, x]$, делящихся на d , равно целой части числа x/d .
- 19) Используя теорему Чебышева, докажите, что если $n \geq 2$, то $p_n + p_{n+1} > p_{n+2}$, где p_n есть n -е простое число.
- 20) Пусть p, q – различные простые числа и e, f – такие целые числа, что $ef \equiv 1 \pmod{\varphi(pq)}$. Докажите, что $a^{ef} \equiv a \pmod{pq}$ для любого целого числа a .
- 21) Докажите, что для любого нечетного числа $n \geq 1$ число $2^{n!} - 1$ делится на n .
- 22) Методом Б. Паскаля выведите признак делимости на 3.
- 23) Докажите, что 561 является числом Р. Кармихаэля (R. Carmichael).
- 24) Докажите, что если δ – показатель числа a по модулю n , то число δ делит $\varphi(n)$.
- 25) Докажите теорему Вильсона: если p – простое число, то $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
- 26) Докажите, что не существует натурального числа n такого, что число $1 + 2 + \dots + n$ оканчивается цифрой 7.
- 27) Докажите, что парабола $5x^2 - 11y = 7$ не содержит точек с целыми координатами.
- 28) Пусть p – нечетное простое число. Докажите, что сравнение $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ разрешимо тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Примеры задач:

1. Найдите двузначное число, сравнимое с 2 по модулю 3 и 7 и с -2 по модулю 11.

2. Решите сравнение $2x - 3y \equiv 4 \pmod{5}$.
3. Разложите число 539/103 в цепную дробь.
4. Исследовать, какие из чисел между 2320 и 2350 являются простыми.

Вид оцениваемой работы:	Удельный вес указанного вида работы в итоговой оценке (в процентах)	В течение семестра/в конце семестра	Критерии оценивания указанного вида работы
Инд. задание в системе Moodle.	20%	В течение семестра	По 100-бальной системе.
Тесты в системе Moodle.	30%	В течение семестра	Максимальное использование возможностей программы
Зачет	50%	В конце семестра	Студент допускается до зачета только при наличии выполненных индивидуального задания и теста. 1) Полный ответ, изложенный кратко и ясно – «зачет». 2) Ответ неполный (но $> 50\%$), пояснения логически непротиворечивы – «зачет». 3) Ответ неполный ($< 50\%$), отсутствие логики в пояснениях – «незачет». 4) Ответ по сути отсутствует – «незачет».

Студенты, не выполнившие тесты или контрольные работы, получают дополнительно идентичные задачи и вопросы, после их решения и положительного ответа получают билет для зачета.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест (РООПК 1.1 и РООПК 1.3).

1) Решением в $\mathbb{N}$ уравнения $x^y = y^x$ являются только следующие наборы натуральных чисел:

а) (1,1), (2,4), (4,2).

б) (a,a) , (2,4), (4,2), где a из $\mathbb{N}$.

в) (a,a) , $(2b,4b)$, $(4b,2b)$, где $a \in \mathbb{N}$, а $b = 1$ или $b = 2$.

г) в) (a,a) , $(b,2b)$, $(2b,b)$, где a, b из $\mathbb{N}$.

Ответ: б).

2) Теорема Чебышева формулируется так:

а) Для любого натурального числа $n \geq 6$ между числами n и $2n$ существуют по крайней мере два простых числа.

б) Для любого натурального числа $n \geq 6$ между числами n и $2n$ существует хотя бы одно простое число.

в) Для любого натурального числа $n \geq 28$ между числами n и $2n$ существуют по крайней мере три простых числа.

Ответ: а).

Задачи (РООПК 1.1 и РООПК 1.3).

1) Вычислить символы Лежандра: (166/229) и (41/617).

Ответ. -1 и 1 .

2) Являются ли 2, 7, 11 и 13 первообразными корнями по модулю 61?

Ответ. 2 и 7 – первообразные, 11 – нет, так как $11^4 \equiv 1 \pmod{61}$.

3) Решить в $\mathbb{N}$ уравнение $x! + y! = z!!$. Здесь $z!!$ – произведение натуральных чисел, не превосходящих числа z и имеющих с ним одинаковую четность.

Ответ. (1,1,2), (2,1,3), (1,2,3).

Теоретические вопросы (РООПК 1.1 и РООПК 1.3).

1) Мультипликативность функции $\tau(n)$. Доказать, что если $n = p^\alpha \dots q^\gamma$ – каноническое разложение числа n , то $\tau(n) = (\alpha + 1) \dots (\gamma + 1)$.

2) Пусть p – нечетное простое число. Доказать, что сравнение $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ разрешимо тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$.

3) Докажите формулу для функции Эйлера $\varphi(n)$.

Ответы на вопросы должны содержать определения соответствующих понятий, пояснение необходимых для доказательства свойств, само доказательство должно быть полным и безукоризненным с точки зрения логики

Информация о разработчиках

Чехлов Андрей Ростиславович, д.ф.-м.н., доцент, профессор каф. алгебры ТГУ.