Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

САЕ Институт «Умные материалы и технологии»

УТВЕРЖДАЮ:
Директор
_______________И.А. Курзина
« 05 » _______11_______ 2024 г.

Оценочные материалы по дисциплине

Теория узлов. Топология

по направлению подготовки

19.03.01 Биотехнология

Направленность (профиль) подготовки:
«Молекулярная инженерия»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
____________И.А. Курзина

Председатель УМК
____________Г.А. Воронова

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-1 – Способен изучать, анализировать, использовать биологические объекты и процессы, основываясь на законах и закономерностях математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязях.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

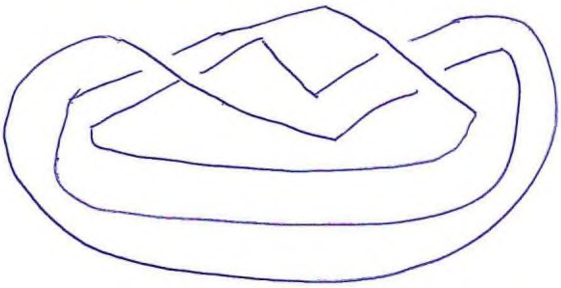
ИОПК-1.1. Демонстрирует способность применять законы математических, физических, химических и биологических наук и их взаимосвязи при решении поставленной задачи.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

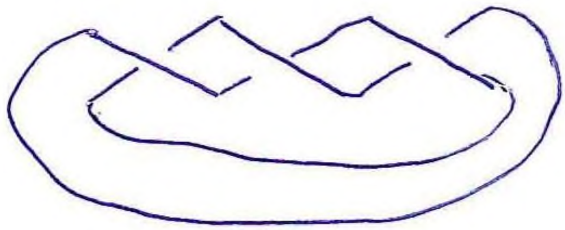
– Домашнее задание
– Коллоквиум
– Контрольная работа

1.1. Домашнее задание 1 (ИОПК-1.1.)

Задание 1.1.
Используя движения Рейдермейстера, показать, что $K_{3,2} \cong K_{2,3}$.

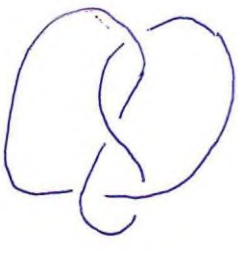


$K_{3,2}$



$K_{2,3}$

Задание 1.2.
Показать, что $E \cong E^*$ (E^* - зеркальный образ диаграммы E, полученный путём переключения всех перекрёстков).

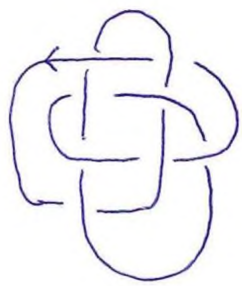


E

E^*

Задание 1.3.
Показать, что $\overrightarrow{8_{17}} \cong \overrightarrow{8^*_{17}}$ (это покажет, что $\overrightarrow{8_{17}} \ncong \overleftarrow{8_{17}}$)

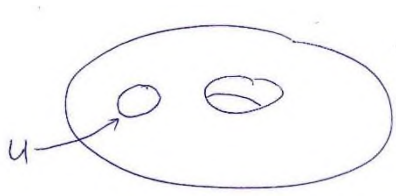
$\overrightarrow{8_{17}}$



$\overleftarrow{8_{17}}$

Задание 1.4.
Доказать, что $(S^3, K_{n,m})$ $(S^3, K_{m,n})$, если НОД$(m, n) = 1$.

Задание 1.5.
Представьте $K_{m,n} \subset S^1 \times S^1$ как вложение кривой на торе $S^1 \times S^1$. (при НОД$(m, n) = 1$).
Показать, что существует сохраняющий ориентацию автогомеоморфизм h пространства $S^1 \times S^1$ такой, что $h\left(S^1 \times S^1, K_{m,n}\right) = (S^1 \times S^1, U)$, где U – тривиальная окружность на торе.



Задание 1.6.
Вычислить одно представление для $\pi_1(E) \cong \pi_1(S^3 \setminus E)$, и использовать этот результат , чтобы доказать , что $E \ncong T$, где T – это узел трилистник.

E $\qquad$ $T = K_{2,3}$

Задание 1.7.
Доказать, что представление Виртингера для диаграммы узла K даёт группу G, такую, что это группа (с точностью до изоморфизма) под движениями Редермейстера, является инвариантом.

Задание 1.8.

K

а) Выведите одно представление для $\pi_1(M^3(K))$, где $M^3(K)$ – многообразие Пуанкаре.
б) Покажите, что $H_1(M^3(K))$ – тривиальная группа

Задание2.1.
Пусть $x * y = 2y - x$ для $x, y \in Z$ или $x, y \in Z/nZ$ для некоторого натурального числа n.
Показать , что
(a) $x * x = x$
(b) $(x * y) * y = x$
(c) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$
При Z/nZ бинарная операция $*$ даёт действия каждого класса вычетов на множестве $\{0, 1, \dots, \dots n-1\}$ через отображение $x \longmapsto x * k$. Пусть $p(k)$ – эта перестановка. Покажите, что множество перестановок, полученные таким образом , порождает диэдральную группу D_{2n} (т.е. группу симметрий правильного n-угольника), если n нечетное.

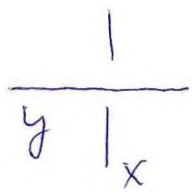
Задание 2.2.
Пусть G – группа с операцией умножения $*$, определенной следующим образом: $g * h = hg^{-1}h$ для $g, h \in G$. Покажите, что $*$ удовлетворяет аксиоме инволюции квандла.

Задание 2.3.
Пусть аксиомы для квандла с двумя бинарными операциями $*$ и # будут следующие:

1. $x * x = x,\ x \# x = x$
2. $(x * y) \# y = x = (x \# y) * y$
3. $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ и $(x \# y) \# z = (x \# z) \# (y \# z)$

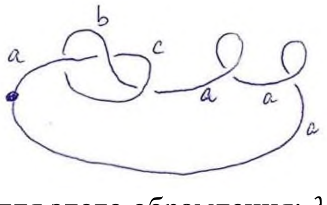
Покажите, что если M – модуль над $Z[t, t^{-1}]$ и мы определим $a * b = t\,a + (1-t)\,b$, $a \# b = t^{-1}\,a + (1-t^{-1})\,b$, то получим структуру квандла.

Задание 2.4.
Допустим, мы можем установить соответствие дуг диаграммы узла с некоторыми элементами группы Z/nZ так, что отношение $z = 2y - x$ удовлетворяет в любом перекрестке соотношению $z = x * y = 2y - x$.



Покажите , что мы можем представить фундаментальную группу этого узла в диэдральной группе D_{2n} следующим образом: отправить элемент фундаментальной группы, соответствующий дуге диаграммы в представлении Виртингера, в перестановку $p(x)$, соответствующую цвету x на этой дуге. Сделайте это для узлов «трилистник» и «восмерка».

Задание 3.1.
Многообразие Пуанкаре через хирургии на Н-обрамленном «трилистнике»

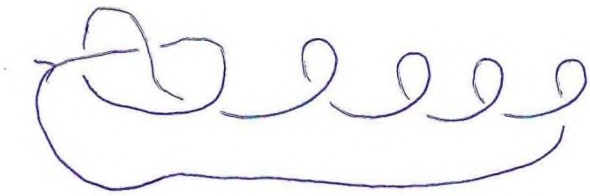


$$\pi(K) = G = (a, b | aba = bab)$$
$$c = b^{-1}ab$$
$$b = a^{-1}ca$$
$$a = c^{-1}bc$$

Долгота λ для этого обрамления: $\lambda = baca^{-2}$ (получен по ходу с точки a)
Тогда $\lambda = ba\,(b^{-1}ab)a^{-2} = bab^{-1}aba^{-2}$.
Тогда $\pi_1(M^3(K)) \cong (\,a, b \mid aba = bab\,;\ bab^{-1}aba^2 = 1)$

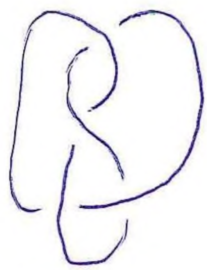
$$H_1\big(M^3(K)\big) = \pi_1\left(M^3(K)\right)^{ab} : \, a^2\, b \; = \; b^2\, a \; \Rightarrow \; a = 1$$
$$1 \; = \; bab^{-1}aba^{-2} \; = \; b$$
$$H_1(M^3(K)) \cong \{\emptyset\}$$
$$H \; = \; \pi_1(M^3(K)) \cong (a, b \mid aba \; = \; bab \,, a^2 \; = \; bab^{-1}ab)$$
$$a^2 \; = \; bab^{-1}ab \; \Leftrightarrow \; a^3 = \; bab^{-1}aba \; = \; bab^{-1}bab \; = \; ba^2b$$
$$H \cong (a, b|\; aba \; = \; bab \,, a^3 \; = \; ba^2b)$$
Пусть $x \; = \; a \,, y \; = \; ab$. Тогда $yx \; = \; aba$.
$$(ab)^3 \; = \; ababab \; = \; aba\, aba \; = \; (aba)^2 \; = \; (yx)^2$$
$$abaaba \; = \; a\,(\, ba^2b)\, a \; = \; aa^3a \; = \; a^5$$
То есть , $x^5 \; = \; y^3 \; = \; (yx)^2$.

Задание 3.2.
Вычислить $\pi_1(M^3(K'))$, где K' как на рисунке и доказать, что $M^3(K')$ не гомеоморфно многообразно Пуанкаре.



Задание 3.3.

F



E

Показать, что $\partial F = E$, где E – узел восьмерка. Найти парную сигнатуру Зейферта и Александера – Конвея.

Задание 3.4.
Прочитайте задание 1. Пусть $x^5 = y^3 \; = \; (yx)^2$. Положим $a = x \,, b \; = \; x^{-1}y$. Докажите, что
а) $aba \; = \; bab$
б) $a^3 \; = \; ba^2b$
Покажите, что $\pi_1(M^3(K)) \cong (x, y|x^5 \; = \; y^3 \; = \; (yx)^2)$.

Оценка «зачтено» выставляется в случае, если студент правильно выполнил все задания.

Оценка «незачтено» выставляется в случае, если студент выполнил не все задания и/или выполнил задания с существенными ошибками.

1.2. Коллоквиум (ИОПК-1.1.)

1. Приложения рациональных клубков к топологии ДНК.

2. Топоизомеразы и манипуляции с ДНК
3. Теория узлов в понимании белков.
4. Структура белка с глубокими узлами и то, как она может складываться
5. Быстрое обнаружение узлов и применение для предсказания структуры белка.

Оценка «зачтено» выставляется в случае, если студент правильно и развернуто ответил на вопросы коллоквиума.

Оценка «незачтено» выставляется в случае, если студент ответил не все вопросы коллоквиума и/или ответил с существенными ошибками.

1.3.Контрольная работа (ИОПК-1.1.)

Задание 1.

Докажите, что $M^3(K)) \cong S^3$, где K как на рисунке:

Задание 2.
Рассмотрите узел, отличный от трилистника и восьмерки, найдите его индекс зацепления , фундаментальную группу его дополнения, полинома Джонса, полином HOMFLY, полином Александера, скобочный полином Кауффмана.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка «5» (отлично) – выставляется обучающемуся, допустившему до 10 % ошибок в контрольной работе.

Оценка «4» (хорошо) – выставляется обучающемуся, допустившему до 24 % ошибок в контрольной работе.

Оценка «3» (удовлетворительно) – выставляется обучающемуся, допустившему до 39 % ошибок в контрольной работе..

Оценка «2» (неудовлетворительно) – обучающийся допустил более 40 % ошибок в контрольной работе.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в четвертом семестре проводится в устной форме по билетам. Продолжительность зачёта 1,5 часа.

Билет содержит 2 вопроса, проверяющий ИОПК-1.1.. При ответе на вопрос оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал (Таблица 1).

Таблица 1. Система критериев при оценивании

Критерии соответствия	Оценка
Содержание ответа являются полными. Студент правильно понимает терминологию. Демонстрирует умение понимать, доказательно и логически связно отвечать на вопросы.	зачтено
Неполное, логически противоречивое изложение ответа. Студент не понимает и неправильно использует терминологию. Не может доказательно и логически связно отвечать на вопросы.	не зачтено

Темы, которые будут содержатся в билетах зачета.
1. Зацепления и их диаграммы. Преобразования Рейдемейстера.

2. Теорема Рейдемейстера.
3. Ориентация, зеркальные узлы, обратимые узлы.
4. Полугруппа узлов.
5. Порядок зацепления.
6. Мостовое число.
7. Индекс распутывания.
8. Индекс зацепления.
9. Группа узла.
10. Трехцветная раскраска диаграммы. Раскраска диаграммы в p цветов.
11. Полином Листинга.
12. Скобочный полином Кауффмана.
13. Полином Джонса.
14. Распутывающие соотношения.
15. Свойства полинома Джонса.
16. Ширина полинома Джонса.
17. Полином HOMFLY.
18. Полином шахматной раскраски. Полиномы графов.
19. Заузленные графы в трехмерном пространстве. Преобразования Рейдемейстера для диаграмм заузленных графов.
20. Полином Ямады для графов. Полином Ямады для заузленных графов.
21. Узлы и зацепления во вложениях полных графов. Теорема Конвея – Гордона.
22. Теорема Закса.
23. Задание групп копредставлением.
24. Группа кос.
25. Группа крашеных кос.
26. Группа кос как группа автоморфизмов свободной группы.
27. Косы и зацепления. Теорема Александера.
28. Преобразования Маркова.
29. Линейные представления групп кос. Представлению Бурау.
30. След Окнеану. Полином Джонса от двух переменных.
31. Свойство полинома Джонса от двух переменных. Распутываюшие соотношения.
32. Полином Джонса от двух переменных и другие полиномиальные инварианты.
33. 2-связки и рациональные связки.
34. Непрерывные дроби и классификация рациональных связок.
35. Альтернативные определения тангл-дроби.
36. Дроби через раскрашивание.
37. Классификация неориентированных рациональных узлов.
38. Рациональные узлы и их зеркальные отражения.
39. Приложения рациональных связок к топологии ДНК.
40. Топоизомеразы и манипуляции с ДНК
41. Применение теории узлов для понимании строения белков.
42. Структура белка с глубокими узлами и то, как она может складываться.
43. Быстрое обнаружение узлов и применение для предсказания структуры белка.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Пример теоретических вопросов (ИОПК-1.1)

1. Классификация и инварианты:

a) Как можно показать, что два узла, изображенных на диаграммах, не являются изотопными, если их многочлены Александера совпадают? Какие дополнительные инварианты можно использовать?

b) Существуют ли узлы, для которых многочлен Александера тривиален? Если да, приведите пример.

c) Можно ли по многочлену Джонса однозначно определить узел? Существуют ли узлы с одинаковым многочленом Джонса, но различной топологией?

2. Топологические концепции:

a) Каким образом можно показать, что пространство с n дырками не является гомеоморфным сфере?

b) Как можно определить род поверхности? Приведите пример поверхности с родом c) Что такое фундаментальная группа топологического пространства? Как она связана с гомеоморфизмами?

3. Применение теории узлов:

a) Как можно использовать теорию узлов для описания структуры сложных молекул в молекулярной биологии?

b) Как теорию узлов можно использовать для моделирования квантовой теории гравитации?

c) Как можно использовать теорию узлов для решения задач по оптимизации алгоритмов в информатике?

4. Дополнительные вопросы:

a) Существуют ли узлы, для которых не возможно построить диаграмму с минимальным числом перекрестков?

b) Как можно использовать концепции топологии для описания форм в естественных науках, таких как биология и геология?

c) Какие нерешенные проблемы существуют в теории узлов и топологии?

Информация о разработчиках

Выонг Х.Б., канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра ТГУ.