

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан

Л. В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Комплексный анализ

по направлению подготовки / специальности

02.03.01 Математика и компьютерные науки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:

Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Теоретическая, вычислительная и экспериментальная механика

Форма обучения

Очная

Квалификация

Математик. Преподаватель / Математик. Вычислитель /

Исследователь в области математики и компьютерных наук

Механик. / Механик. Исследователь

Год приема

2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Л.В. Гензе

Председатель УМК

Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- коллоквиум

Пример заданий на контрольной по теме «Открытая и замкнутая комплексные плоскости» (РООПК-1.2)

1. Для указанной функции найти действительную и мнимую части $w = \bar{z} - iz^2$;
2. Записать комплексные числа в показательной форме: $1+i$;
3. Вычислить: $\operatorname{Ln}(-i)$;
4. Вычислить: 3^{2+i} ;
5. Решить уравнение: $\sin z = \pi i$.

Пример заданий на контрольной по теме «Теория Коши».

1. Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2 (ответ дать в алгебраической форме): $\int_C \bar{z} \operatorname{Re} z dz$, $C: y = x^2$; $z_1 = 0$; $z_2 = -1+i$.

2. Найти интеграл по контурам L_1, L_2, L_3 используя интегральную формулу Коши, теорему Коши:

$$\int_L \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)}, \text{ а) } L_1: |z-i|=1, \text{ б) } L_2: |z+1|=2, \text{ в) } L_3: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Пример заданий на контрольной по теме «Голоморфность и конформность. Основные элементарные отображения».

Найти образ области $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$ при отображении $w = \frac{1}{2} \left(e^z + \frac{1}{e^z} \right)$

Пример заданий на контрольной по теме «Теория вычетов».

1. Вычислить интегралы при помощи вычетов:

$$a) \int_{\partial D} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}; \quad б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad a > 0; \quad в) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} dx$$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполнено от 70% работы.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполнено от 50% до 70% работы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполнено менее 50% работы.

Вопросы к коллоквиуму (РООПК-1.1)

1. Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
2. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа. Операции умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, их геометрия.
3. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана.
4. Метрические пространства над полем $\mathbb{C}$ и над $\overline{\mathbb{C}}$.
5. Комплексная функция вещественного переменного, понятия ее производной и интеграла. Траектории и кривые. Основные понятия для траекторий и кривых.
6. Область. Предложение об эквивалентности связности и линейной связности для открытых множеств. Порядок связности области.
7. Комплексная функция комплексного переменного (к.ф.к.п.). Однолиственность. Дифференцируемость. Голоморфность. Теорема о необходимом и достаточном условиях дифференцируемости к.ф.к.п.
8. Геометрический смысл производной. Конформность.
9. Понятия интеграла по траектории и интеграла по кривой. Теорема о равенстве интегралов по эквивалентным траекториям.
10. Свойства интеграла по кривой. Утверждение об интегралах с противоположной ориентацией и теореме об оценке интеграла - с доказательством.
11. Степенная функция.
12. Дробно-линейная функция. Теоремы о непрерывности, о композиции и обратной функции для дробно-линейной, о круговом свойстве.
13. Теорема о построении дробно-линейной функции по трем прообразам и трем образам. Теорема о том, что др.-лин. функция переводит симметричные точки в симметричные.
14. Функция Жуковского.
15. Показательная функция.
16. Тригонометрические и гиперболические функции.
17. Лемма Гурса.
18. Модуль непрерывности. Лемма об оценке модуля интеграла через модуль непрерывности.
19. Лемма о длине границы.
20. Интегральная теорема Коши. Следствие.

21. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
22. Интеграл Коши. Теорема о голоморфности интеграла Коши.
23. Теорема о бесконечной дифференцируемости интеграла Коши.
24. Теорема об интегральной формуле Коши.
25. Теорема о бесконечной дифференцируемости голоморфной функции. Теорема о среднем.
26. Теорема об общем виде первообразной. Показать, что равны интегралы по двум жордановым кусочно-гладким кривым, имеющим общее начало и общий конец, от непрерывной функции, такой что интеграл от нее по любой замкнутой кривой равен нулю.
27. Теоремы о существовании первообразной для непрерывной и для голоморфной функций.
28. Теорема Морера. Теорема о формуле Ньютона - Лейбница.
29. Предложение о необходимом и достаточном условиях сходимости числовой последовательности.
30. Теорема о непрерывности предельной функции функциональной последовательности. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла.
31. Теорема Вейерштрасса о голоморфности предельной функции.
32. Теорема Абеля.
33. Теорема о формуле Коши - Адамара.
34. Теорема Тейлора о разложении голоморфной функции в степенной ряд.
35. Теорема о единственности разложения голоморфной функции в степенной ряд. Теорема Лиувилля.
36. Ряд Лорана. Сходимость ряда Лорана. Теорема Лорана.
37. Изолированные особые точки, их классификация. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.
38. Теорема о связи полюса с нулем. Следствие.
39. Теорема Сохоцкого.
40. Понятие вычета. Теорема Коши о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.
41. Теорема о логарифмическом вычете.
42. Примеры применения вычетов - основная теорема алгебры многочленов, теорема о вычислении несобственного интеграла.
43. Принцип единственности.
44. Принцип максимума модуля.

Результаты коллоквиума определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Студент получает «отлично», если он успешно, без ошибок отвечает на вопрос. «Хорошо» ставится в случае, если ответ верен не менее, чем на 75%, «удовлетворительно» - если ответ верен не менее, чем на 50%. Если студент показывает знание менее 50%, то ставится оценка «неудовлетворительно».

2. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Студент, имеющий зачет по всем контрольным работам курса и сдавший коллоквиум на положительную оценку, получает зачет.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тестовые вопросы для оценивания остаточных знаний (РООПК 1.3):

1. Основные формы записи комплексного числа.
2. Записать в аналитическом виде окрестность конечной точки и окрестность бесконечности.
3. Геометрические свойства конформного отображения.
4. Примеры однолистных и не однолистных отображений.
5. Суть интегральной теоремы Коши.
6. Интегральная формула Коши.
7. Голоморфное отображение и особые точки.
8. Ряд Лорана ряд Тейлора.
9. Вычет, вычисление и применение вычетов.
10. Основные принципы.
11. Аналитическое продолжение на примерах.
12. Связь между голоморфным отображением и гармонической функцией.
13. Теорема Римана.
14. Основные элементарные отображения.

Задачи (РООПК 1.1):

1. Найти действительную и мнимую части, модуль и аргумент комплексного числа
$$z = \frac{1+3i}{-1+4i}$$
2. Вычислить: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$
3. Найти все значения корня $\sqrt{2i}$
4. Изобразить множество точек плоскости, удовлетворяющих системе неравенств $|z| < 1$ и $|z+1| \leq 1$
5. Найти все изолированные особые точки функции $f(z) = \frac{z+2}{z^2(z+i)}$
6. Вычислить интеграл при помощи вычетов: $\int_{\gamma} \frac{2dz}{z^2(z+1)}$, если $\gamma: |z-i|=3$

Информация о разработчиках

Колесников Иван Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Копанев Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Садритдинова Гулнора Долимджановна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ