

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:  
Директор  
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Дополнительные главы математической статистики

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**Математические методы в цифровой экономике**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Бакалавр**

Год приема  
**2024**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
К.И. Лившиц

Председатель УМК  
С.П. Сущенко

## **1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

ОПК-4. Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности.

ПК-1. Способен осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем.

ПК-2. Способен анализировать и оценивать риски, разрабатывать отдельные функциональные направления управления рисками.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-2.3. Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-4.3. Использует современные информационные технологии на всех этапах решения задач профессиональной деятельности.

ИПК-1.1. Осуществляет проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований.

ИПК-2.2. Собирает и обрабатывает аналитическую информацию для анализа и оценки рисков.

## **2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- лабораторные работы.

### **Лабораторная №1 (Задание)**

- 1) Провести моделирование выборки с возвращением для конечного объема  $n$ . Оценить неизвестную вероятность по классической схеме. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии оценки.
- 2) К построенной выборке с возвращением применить оптимальную комбинированную оценку неизвестной вероятности с привлечением

дополнительной информации. Провести анализ данной оценки. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии оценки.

Провести анализ адаптивных комбинированных оценок №1 и №2. Смоделировать полученный результат. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии.

#### Лабораторная №2 (Задание)

- 1) Найти математическое ожидание и СКО адаптивных оценок №3 и №4, предварительно вычислив  $\Psi_3(k, n, p_a)$ ,  $\Psi_4(k, n, p_a)$ .
- 2) Провести анализ адаптивных комбинированных оценок №3 и №4. Смоделировать полученный результат. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии оценки.
- 3) Сравнить математическое ожидание полученных ранее оценок (классическая, оптимальная, адаптивные комбинированные оценки №1,2,3,4), при изменении основных параметров модели. Сделать выводы. Построить соответствующие графики.
- 4) Сравнить СКО оценок, полученных ранее (классическая, оптимальная, адаптивные комбинированные оценки №1,2,3,4), при изменении основных параметров модели. При анализе использовать отношения (16). Сделать выводы. Построить соответствующие графики.
- 5) По полученным из пункта 4) данным выделить интервалы улучшения качества оценок в зависимости от параметров модели. Соответствующие результаты представить в виде таблицы для каждой комбинированной оценки отдельно.

**Примечание.** Для каждой таблицы взять значения  $p_a = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$  и  $n = 10$ .

#### Лабораторная №3 (Задание)

- 1) Провести моделирование выборки без возвращения для конечного объема  $n$  из генеральной совокупности объема  $N$ . Оценить неизвестную долю по классической схеме. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии оценки.
- 2) К построенной выборке без возвращения применить оптимальную комбинированную оценку неизвестной доли с привлечением дополнительной информации. Провести анализ данной оценки. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии оценки.
- 3) Найти математическое ожидание и СКО адаптивных оценок №1 и №2, предварительно вычислив  $\Psi_1(N, k, n, p_a)$ ,  $\Psi_2(N, k, n, p_a)$ .
- 4) Провести анализ адаптивных комбинированных оценок №1 и №2. Смоделировать полученный результат. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии оценки.

#### Лабораторная №4 (Задание)

- 1) Найти математическое ожидание и СКО адаптивных оценок №3 и №4, предварительно вычислив  $\Psi_3(N, k, n, p_a)$ ,  $\Psi_4(N, k, n, p_a)$ .
- 2) Провести анализ адаптивных комбинированных оценок №3 и №4. Смоделировать полученный результат. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии оценки.
- 3) Сравнить математическое ожидание полученных ранее оценок (классическая, оптимальная, адаптивные комбинированные оценки доли №1,2,3,4), при изменении

основных параметров модели. Сделать выводы. Построить соответствующие графики.

- 4) Сравнить СКО оценок, полученных ранее (классическая, оптимальная, адаптивные комбинированные оценки доли №1,2,3,4), при изменении основных параметров модели. При анализе использовать отношения (26). Построить соответствующие графики.
- 5) По полученным из пункта 4) данным выделить интервалы улучшения качества оценок в зависимости от параметров модели. Соответствующие результаты представить в виде таблицы для каждой комбинированной оценки отдельно.

**Примечание.** Для каждой таблицы взять значения  $p_a = 0,5$  и  $n = 10$ ,  $N = 40$ .

#### Лабораторная №5 (Задание)

- 1) Найти математическое ожидание и СКО  $k$  - адаптивных оценок, предварительно вычислив  $\Psi_k(i, n, p_a)$ .
- 2) Провести анализ  $k$  - адаптивных комбинированных оценок. Смоделировать полученный результат. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии оценок.
- 3) Сравнить СКО  $k$  - адаптивных комбинированных оценок при изменении основных параметров модели  $k, n, p_a$ . При анализе использовать отношения (7). Построить соответствующие графики. Сделать выводы.

#### Лабораторная №6 (Задание)

- 1) Найти математическое ожидание и СКО адаптивных оценок доли №1 и №2, предварительно вычислив  $\Psi_3(N, k, n, p_a)$ ,  $\Psi_4(N, k, n, p_a)$ .
- 2) Провести анализ адаптивных комбинированных оценок. Смоделировать полученный результат. Построить соответствующие графики для математического ожидания и дисперсии оценки.
- 3) Сравнить СКО адаптивных оценок при изменении основных параметров модели. При анализе использовать отношения (11) и (12). Построить соответствующие графики.

По полученным из лабораторной №5 данным сравнить  $k$  – адаптивные оценки с оценками, полученными в данной лабораторной. Соответствующие результаты представить в виде графика отношений СКО. Сделать выводы.

Текущий контроль успеваемости осуществляется выполнением контрольной работы, которая состоит в письменных ответах на три задания билета. В билете один вопрос теоретический и две задачи.

#### Примерный перечень теоретических вопросов

1. Вопрос 1. Виды дополнительной априорной информации при обработке статистических данных.
2. Вопрос 2. Условное оценивание функционалов при несмещенных априорных условиях.
3. Вопрос 3. Учет априорной информации методом коррелированных процессов.
4. Вопрос 4. Структура оптимальной оценки линейного функционала с учетом дополнительной информации.
5. Вопрос 5. Оценки с учетом дополнительной информации, основанные на U-статистиках.

6. Вопрос 6. Оценки с учетом дополнительной информации, как функционалы Мизеса.

7. Вопрос 7. Методы построения адаптивных оценок линейных функционалов с учетом дополнительной информации.

8. Вопрос 8.  $k$  – адаптивные оценки функционалов с учетом дополнительной информации.

9. Вопрос 9. Асимптотические свойства адаптивных оценок.

10. Вопрос 10. Оценивание вероятности с учетом априорной догадки.

11. Вопрос 11. Методы построения адаптивных оценок вероятности с учетом априорной догадки.

### **Примеры задач:**

#### **1. Задача 1.**

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что функционал

$$b(F) = F(z_1) = \int c(z_1-t)dF(t) = \beta.$$

#### **2. Задача 2**

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что функционал

$$b(F) = F(z_1) = \int c(z_1-t)dF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}.$$

Указание: использовать при построении U-статистику.

#### **3. Задача 3**

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что функционал

$$b(F) = F(z_1) = \int c(z_1-t)dF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}.$$

Указание: использовать при построении функционалы Мизеса.

#### **4. Задача 4**

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что математическое ожидание  $ET_1 = b(F) = \int tdF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}.$

Указание: использовать при построении U-статистику.

### 5. Задача 5

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что математическое ожидание  $ET_1 = b(F) = \int tdF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}$ .

Указание: использовать при построении функционалы Мизеса.

### 6. Задача 6

Дано: Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – независимые результаты эксперимента (выборка) объема  $n$ , а  $P = P(B)$  – вероятность некоторого события  $B$ , которое может наступить в данном эксперименте. Пусть  $p_a$  – априорная догадка, которая выступает в качестве возможного значения вероятности  $P$ .

Требуется: построить оценку для неизвестной вероятности  $P$ , учитывающей совместно непараметрическую оценку  $\hat{P} = \hat{P}(B) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I_B(X_i)$  и  $p_a$ ,

Указание: критерием качества оценки взять среднеквадратическую ошибку (СКО).

Критерии оценивания результатов текущей успеваемости следующий:

Оценка «отлично» ставится при полных ответах на все вопросы билета.

Оценка «хорошо» ставится при полных ответах на вопросы билета кроме одного (любого) вопроса.

Оценка «удовлетворительно» ставится при полных ответах на вопросы билета кроме двух (любых) вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится при не ответах на все вопросы билета.

### 3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в восьмом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех вопросов. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первый вопрос представляет собой теоретическую часть курса, излагается в развернутой форме, проверяет ИУК-1.1.

Ответы на вопросы со второго по третий предполагают решение задач в развернутой форме, краткую интерпретацию полученных результатов и проверяют ИОПК-2.2 и ИПК-3.3.

#### Примерный перечень теоретических вопросов

1. Виды дополнительной априорной информации при обработке статистических данных.
2. Условное оценивание функционалов при несмещенных априорных условиях.
3. чет априорной информации методом коррелированных процессов.
4. Структура оптимальной оценки линейного функционала с учетом дополнительной информации.
5. Оценки с учетом дополнительной информации, основанные на U-статистиках.
6. Оценки с учетом дополнительной информации, как функционалы Мизеса.
7. Методы построения адаптивных оценок линейных функционалов с учетом дополнительной информации.
8.  $k$  – адаптивные оценки функционалов с учетом дополнительной информации.
9. Асимптотические свойства адаптивных оценок.

10. Оценивание вероятности с учетом априорной догадки.

11. Методы построения адаптивных оценок вероятности с учетом априорной догадки.

### Примеры задач:

#### 1. Задача 1.

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что функционал

$$b(F) = F(z_1) = \int c(z_1-t)dF(t) = \beta.$$

#### 2. Задача 2

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что функционал

$$b(F) = F(z_1) = \int c(z_1-t)dF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}.$$

Указание: использовать при построении U-статистику.

#### 3. Задача 3

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что функционал

$$b(F) = F(z_1) = \int c(z_1-t)dF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}.$$

Указание: использовать при построении функционалы Мизеса.

#### 4. Задача 4

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что математическое ожидание  $ET_1 = b(F) = \int tdF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}.$

Указание: использовать при построении U-статистику.

#### 5. Задача 5

Дано:  $T$  – продолжительность безотказной работы элемента с функцией распределения  $F(t)$ , а  $T_1, \dots, T_n$  – результаты наблюдений моментов отказов однородной группы из  $n$  элементов.

Требуется: построить оценку для функции распределения

$$\theta = F(z) = \int c(z-t)dF(t)$$

при условии, что математическое ожидание  $ET_1 = b(F) = \int tdF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}.$

Указание: использовать при построении функционалы Мизеса.

## 6. Задача 6

Дано: Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - независимые результаты эксперимента (выборка) объема  $n$ , а  $P = P(B)$  - вероятность некоторого события  $B$ , которое может наступить в данном эксперименте. Пусть  $p_a$  - априорная догадка, которая выступает в качестве возможного значения вероятности  $P$ .

Требуется: построить оценку для неизвестной вероятности  $P$ , учитывающей совместно непараметрическую оценку  $\hat{P} = \hat{P}(B) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I_B(X_i)$  и  $p_a$ ,

Указание: критерием качества оценки взять среднеквадратическую ошибку (СКО).

### Примеры экзаменационных билетов:

#### Экзаменационный билет № 1

1. Виды дополнительной априорной информации при обработке статистических данных.

2. Построить оценку для функции распределения  $F(z)$  при условии, что функционал  $b(F) = F(z_1) = \int c(z_1 - t) dF(t) = \beta$ .

3. Построить оценку для неизвестной вероятности  $P$ , учитывающей совместно непараметрическую оценку  $\hat{P} = \hat{P}(B) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I_B(X_i)$  и  $p_a$ ,

#### Экзаменационный билет № 2

1. Условное оценивание функционалов при несмещенных априорных условиях.

2. Построить оценку для функции распределения  $F(z)$  при условии, что функционал

$$b(F) = F(z_1) = \int c(z_1 - t) dF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}.$$

Указание: использовать при построении U-статистику.

3. Построить оценку для неизвестной вероятности  $P$ , учитывающей совместно непараметрическую оценку  $\hat{P} = \hat{P}(B) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I_B(X_i)$  и  $p_a$ ,

#### Экзаменационный билет № 3

1. Учет априорной информации методом коррелированных процессов.

2. Построить оценку для функции распределения  $F(z)$  при условии, что математическое ожидание  $ET_1 = b(F) = \int t dF(t) \in \{\beta_1, \beta_2\}$ .

Указание: использовать при построении U-статистику.

3. Построить оценку для неизвестной вероятности  $P$ , учитывающей совместно непараметрическую оценку  $\hat{P} = \hat{P}(B) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I_B(X_i)$  и  $p_a$ ,

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Необходимым условием получения положительной оценки является выполнение всех запланированных лабораторных работ.

Оценка «отлично» ставится при полных ответах на все вопросы экзаменационного билета.

Оценка «хорошо» ставится при полных ответах на вопросы экзаменационного билета кроме одного (любого) вопроса.

Оценка «удовлетворительно» ставится при полных ответах на вопросы экзаменационного билета кроме двух (любых) вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится при не ответах на вопросы экзаменационного билета.

Текущий контроль влияет на промежуточную аттестацию при возникновении пограничной ситуации в оценках. Студент получает оценку выше, если он был аттестован при текущем контроле и оценку ниже, если был не аттестован.

#### **4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)**

##### **Примерный перечень теоретических вопросов**

1. Виды дополнительной априорной информации при обработке статистических данных.
2. Условное оценивание функционалов при несмещенных априорных условиях.
3. Чет априорной информации методом коррелированных процессов.
4. Структура оптимальной оценки линейного функционала с учетом дополнительной информации.
5. Оценки с учетом дополнительной информации, основанные на U-статистиках.
6. Оценки с учетом дополнительной информации, как функционалы Мизеса.
7. Методы построения адаптивных оценок линейных функционалов с учетом дополнительной информации.
8.  $k$  – адаптивные оценки функционалов с учетом дополнительной информации.
9. Асимптотические свойства адаптивных оценок.
10. Оценивание вероятности с учетом априорной догадки.
11. Методы построения адаптивных оценок вероятности с учетом априорной догадки.

Необходимо дать развернутый ответ на один из вопросов, привести основные определения и выводы формул.

##### **Информация о разработчиках**

Дмитриев Юрий Глебович, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.

Бахчаева Мария Андреевна, ассистент кафедры системного анализа и математического моделирования института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.