

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:  
Декан ММФ ТГУ  
Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

**Дополнительные главы топологии**

по направлению подготовки

**01.03.01 Математика**

**02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Направленность (профиль) подготовки :

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики  
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и  
компьютерных наук**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**

Год приема

**2023**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
Л.В. Гензе

Председатель УМК  
Е.А. Тарасов

Томск – 2023

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-4 Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.

ПК-1 Способен проводить научно-исследовательские разработки по отдельным разделам выбранной темы.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 4.1 Проводит поиск и обработку научной и научно-технической информации, необходимой для решения исследовательских задач

ИОПК 4.2 Оценивает полученные результаты и формулирует выводы по итогам проведенных исследований

ИПК 1.1 Проводит работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований

ИПК 1.2 Подготавливает планы и программы проведения отдельных этапов научно-исследовательской работы

ИПК 1.3 Проводит отдельные этапы научно-исследовательской работы

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– расширение и углубление знаний, полученных студентами при освоении дисциплины «Топология»;

– приобретение умения применять полученные знания при решении теоретических вопросов в научных исследованиях.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Восьмой семестр, зачет

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Теория множеств, Топология.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 з.е., 72 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

в том числе практическая подготовка: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

Тема 1. Введение.

Необходимые сведения из теории множеств. Кардиналы и их арифметика

Тема 2. Базы и предбазы. Аксиомы счетности.

Определение топологии с помощью базы и с помощью фундаментальных систем окрестностей.

Тема 3. Кардинальнозначные инварианты топологических пространств.

Мощность, вес, характер, плотность. Связь между этими инвариантами.

Тема 4. Непрерывные отображения. Открытые и замкнутые отображения. Гомеоморфизмы.

Критерии непрерывного отображения, критерии гомеоморфизма.

Тема 5. Аксиомы отделимости.

Связь между аксиомами отделимости и кардинальнозначными инвариантами. Тихоновские пространства.

Тема 6. Подпространства.

Поведение кардинальнозначных инвариантов и аксиом отделимости при переходе к подпространству. Наследственно нормальные пространства.

Тема 7. Произведения.

Теорема Хьюитта-Марчевского-Пондицери. Теорема об универсальности тихоновского куба. Поведение кардинальнозначных инвариантов и аксиом отделимости при переходе к произведениям.

Тема 8. Компактные пространства и операции над компактами.

Различные критерии компактности. Свойства компактных множеств. Примеры компактных пространств. Отрезки ординалов.

Тема 9. Компактификации.

Упорядочение на множестве всех компактификаций данного пространства. Минимальная (александровская) компактификация. Компактификация Чеха-Стоуна и расширение Волмэна.

Тема 10. Понятия, близкие к компактности.

Линделёфовы пространства, полные по Чеху пространства, счетно компактные, секвенциально компактные и псевдокомпактные пространства.

## **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости и выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр. Домашние задания состоят: (а) в самостоятельном доказательстве следствий из доказанных на лекциях теорем; (б) в самостоятельной проработке доказательств тех теорем, чьи доказательства были изложены схематично.

## **10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

Зачет в восьмом семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос (проверяются ИОПК-4.1, ИОПК-4.2) и две задачи (проверяются ИПК-1.1, ИПК-1.2 и ИПК-1.3). Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Базы и предбазы. Примеры. Теорема о выделении из любого семейства открытых множеств пространства  $X$  подсемейства мощности  $w(X)$  с таким же объединением.
2. Базы и предбазы. Примеры. Теорема о выделении из любой базы пространства  $X$  базы мощности  $w(X)$ .
3. Непрерывные отображения топологических пространств. Критерии непрерывности. Открытые и замкнутые отображения.
4. Топология, порождённая семейством отображений.
5. Теорема Хьюитта-Марчевского-Пондицери.
6. Диагональ отображений. Теорема об универсальности тихоновского куба веса  $m$  для всех тихоновских пространств веса  $m$ .
7. Компактификации. Теорема о существовании максимальной компактификации.
8. Теорема о мощности и весе пространства  $\beta N$ .
9. Теорема о продолжении любого непрерывного отображения в компакт на расширение Чеха-Стоуна.
10. Ультрафильтры и конструкция расширения Волмэна.
11. Теорема о нормальности любого линделёфова пространства.
12. Полные по Чеху пространства. Теорема Бэра о категории.

Примеры задач:

1. Приведите пример непрерывного отображения  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , которое
  - а) открыто-замкнуто;
  - б) открыто, но не замкнуто;
  - в) замкнуто, но не открыто;
  - г) не замкнуто и не открыто.
3. Покажите, что конечное  $T_1$ -пространство дискретно. Убедитесь, что в  $T_1$ -пространствах множество  $A^d$  (множество всех предельных точек множества  $A$ ) обладает следующими свойствами:  $(A^d)^d \subset A^d$ ;  $A^d = \emptyset$ , если  $A$  конечно.
4. Определите функцию  $f: D(c) \rightarrow [0; 1]$ , которую нельзя непрерывно продолжить на компактификацию  $A(c) \oplus A(c)$  пространства  $D(c)$ .
5. Покажите, что если любое открытое подпространство линделёфова пространства  $X$  само линделёфово, то пространство  $X$  наследственно линделёфово.
6. Приведите пример таких топологических пространств  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  что  $\chi(X) < nw(X)$ ,  $\chi(Y) = nw(Y)$  и  $\chi(Z) > nw(Z)$ .
7. Установите, что прямую Зоргенфрея можно непрерывно отобразить на счетное дискретное пространство, но нельзя непрерывно отобразить на несчетное дискретное пространство.
8. Докажите, что регулярность инвариантна относительно открыто-замкнутых отображений.
9. Докажите, что  $X$  – хаусдорфово пространство тогда и только тогда, когда диагональ  $\Delta$  произведения  $X \times X$  замкнута в  $X \times X$ .
10. Докажите, что если  $(X, \tau_1)$  есть  $T_i$ -пространство с  $i = 0, 1, 2$  и  $\tau_2$  – такая топология на  $X$ , что  $\tau_1 \subset \tau_2$ , то  $(X, \tau_2)$  тоже является  $T_i$ -пространством. Покажите, что при  $i \geq 3$  это неверно.

11. Пусть  $X$  – топологическое пространство. Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow X$  называется *ретракцией*, если  $f \circ f = f$ . Множество  $f(X)$  в этом случае называется *ретрактом* пространства  $X$ . Докажите, что непрерывное отображение  $f: X \rightarrow X$  является ретракцией если и только если  $f(x) = x$  для всех  $x \in f(X)$ .

а) Докажите, что для произвольного подпространства  $M$  топологического пространства  $X$  следующие условия эквивалентны:

(1)  $M$  – ретракт пространства  $X$ ;

(2) любое непрерывное отображение  $f: M \rightarrow Y$  в произвольное топологическое пространство  $Y$  продолжается до непрерывного отображения  $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ .

б) Докажите, что если  $X$  – хаусдорфово пространство, то всякий ретракт пространства  $X$  замкнут в  $X$ .

12. Определите функцию  $f: D(\epsilon) \rightarrow [0; 1]$ , которую нельзя непрерывно продолжить на компактификацию «Двойная окружность Александрова» пространства  $D(\epsilon)$ .

13. Пусть  $X$  – произвольное непустое множество и  $\rho: X \times X \rightarrow [0; +\infty)$  –

отображение, заданное формулой 
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$
 Проверьте, что  $\rho$  – это метрика на

множестве  $X$  и найдите, вес, характер и плотность получившегося топологического пространства.

Результаты зачета определяются оценками «зачтено», «незачтено».

Оценка	Критерии соответствия
зачтено	Ставится при выполнении не менее трех из следующих четырех условий: 1) выполнено не менее 50% домашних заданий 2) посещено не менее 80% занятий 3) студент ответил на теоретический вопрос без принципиальных ошибок в доказательствах и рассуждениях 4) студент правильно решил как минимум одну из предложенных задач, возможно, с некоторыми погрешностями и неточностями
незачтено	Ставится, если выполнено не более двух из следующих четырех условий: 1) выполнено не менее 50% домашних заданий 2) посещено не менее 80% занятий 3) студент ответил на теоретический вопрос без принципиальных ошибок в доказательствах и рассуждениях 4) студент правильно решил как минимум одну из предложенных задач, возможно, с некоторыми погрешностями и неточностями

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=6764>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов:

Для качественного освоения дисциплины необходимо постоянно работать с конспектами лекций, и сразу выполнить все задания по лекции (это проверка простых фактов, повторение определений, доказательство простейших утверждений, выводы следствий из доказанных теорем). Кроме этого, самостоятельная работа студентов состоит в более глубоком изучении разделов дисциплины с помощью основной и дополнительной литературы. Перечень литературы по дисциплине находится в пункте 12.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. В.В Федорчук. Введение в топологию. М.: Изд-во МГУ, 2014. — 144 с.
2. Р. Энгелькинг. Общая топология. – М.: Мир, 1986.
3. А.В. Архангельский, В.И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

б) дополнительная литература:

1. Дж. Л. Келли. Общая топология. – М.: Наука, 1980.
2. Р.А. Александрян, Э.А. Мирзаханян. Общая топология. – М.: Высшая школа, 1979.
3. П.С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Физматлит, 2009. — 352 с.

в) ресурсы сети Интернет:

1. <https://arxiv.org/archive/math>
2. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>
3. <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=6764>
4. <http://journals.tsu.ru/mathematics/>

## 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение: нет необходимости;

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
- ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>

## 14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

## 15. Информация о разработчиках

Гензе Леонид Владимирович, к.ф.-м.н., доцент каф. математического анализа и теории функций