Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Теория групп

по направлению подготовки
03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная и прикладная физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
С.Н. Филимонов

Председатель УМК
О.М. Сюсина

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

- ОПК-2 – Способен проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные;
- ПК-1 – Способен проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 2.2 – Анализирует и интерпретирует экспериментальные и теоретические данные, полученные в ходе научного исследования, обобщает полученные результаты, формулирует научно обоснованные;

ИПК 1.1 – Собирает и анализирует научно-техническую информацию по теме исследования, обобщает научные данные в соответствии с задачами исследования .

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля: контрольная работа (ИОПК 2.2, ИПК 1.1).

По дисциплине «Теория групп» предусмотрен коллоквиум. Коллоквиум проводится в форме собеседования. Билет коллоквиума включает два теоретических вопроса из открытого банка вопросов.

Открытый банк теоретических вопросов к коллоквиуму (ИОПК 2.2, ИПК 1.1).

1. Сформулировать определение группы. Доказать единственность единицы и обратного элемента. Что такое коммутативная и некоммутативная группа? Что такое конечная и бесконечная группа. Что такое таблица Кэли конечной группы? Что такое циклическая группа конечного и бесконечного порядка?

2. Сформулировать определение группы эндоморфизмов и автоморфизмов линейного пространства, общей и специальной линейной группы. Что такое матрица линейного оператора. Как определяется естественная топология на общей линейной группе.

3. Что такое симметрическая группа? Пояснить определение, принятую запись элементов и правила умножения в коммутативной группе. Что такое транспозиции? Доказать, что любая подстановка является произведением транспозиций. Сформулировать определение четности подстановки. Что такое знакопеременная группа? Доказать универсальность группы в классе конечных групп.

4. Что такое подгруппа? Сформулировать и доказать характеристические свойства подгруппы. Что такое тривиальные подгруппы? Что такое порядок и индекс подгруппы? Доказать формулу Лагранжа для конечной группы. Привести примеры подгрупп. Сформулировать определение замкнутой и незамкнутой подгруппы топологической группы. Привести примеры замкнутых и незамкнутых подгрупп.

5. Что такое отношение эквивалентности на множестве? Что такое смежные классы по подгруппе? Что такое нормальный делитель (инвариантная подгруппа)? Что такое тривиальные нормальные делители? Что такое простая группа? Доказать отделимость факторпространства топологической группы по замкнутой подгруппе. Привести пример нехаусдорфова факторпространства.

6. Что такое факторгруппа? Сформулировать определение и доказать корректность умножения в факторгруппе.

7. Что такое центр группы? Сформулировать основные свойства центра. Вычислить центр общей линейной группы.

8. Сформулировать определения гомоморфизма групп, ядра гомоморфизма, привести примеры. Сформулировать и доказать основные свойства гомоморфизмов групп. Что такое изоморфизм групп? Привести примеры изоморфизмов. Сформулировать и

доказать критерий изоморфизма групп. Что такое непрерывные гомоморфизмы, непрерывные и топологические изоморфизмы топологических групп? Что такое антигомоморфизмы и антиизоморфизмы групп?

9. Что такое автоморфизм группы, внутренние и внешние автоморфизмы? Привести примеры.

10. Что такое канонический гомоморфизм? Доказать универсальность канонических гомоморфизмов в классах алгебраических и топологических групп.

11. Что такое прямое произведение групп? Привести примеры.

12. Сформулировать определение топологические группы. Доказать существование симметричной окрестности единицы на топологической группе. Сформулировать определение правого и левого сдвига на группе, доказать, что на топологической группе они индуцируют гомеоморфизмы. Доказать, что топология на топологической группе определяется базой окрестностей единицы.

13. Что такое связные топологические группы? Сформулировать и доказать свойства связной компоненты единицы топологической группы. Доказать гомеоморфность компонент связности топологической группы. Доказать, что связная компонента единицы топологической группы порождается любой окрестностью единицы. Привести примеры связных и несвязных групп.

14. Что такое компактные и локально компактные топологические группы? Сформулировать определение равномерной непрерывности. Доказать равномерную непрерывность непрерывной функции на компактной группе. Доказать локальную компактность общей линейной группы и ее замкнутых подгрупп.

15. Сформулировать определения правого и левого действие группы на множестве, представления группы, ассоциированного с действием группы на множестве, эффективного действия, точного представления, свободного действия, непрерывного действие топологической группы на топологическом пространстве.

16. Проанализировать примеры групп преобразований: действие группы Галилея на нерелятивистском пространстве времени; действие групп Лоренца и Пуанкаре в пространстве Минковского; группы вращений и группы Евклида в 3-мерном евклидовом пространстве.

17. Что такое орбита группы преобразований? Доказать, что множество разбивается на орбиты относительно действия группы, привести примеры. Что такое класс сопряженных элементов? Найти классы сопряженных элементов симметрической группы.

18. Что такое однородное пространство, стационарная группа? Привести примеры. Доказать изоморфность стационарных групп точек однородного пространства. Рассмотреть вычисления стационарных групп в примерах вопроса 16. Доказать замкнутость стационарной группы непрерывного действия группы на хаусдорфовом топологическом пространстве.

19. Объяснить конструкцию преобразований факторпространства, индуцированных сдвигами. Построить каноническую модель и каноническую реализацию однородного пространства алгебраической и топологической группы.

20. Что такое билинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов? Что такое матрица билинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму? Что такое J - ортогональная группа? Что такое симметричные и антисимметричные билинейные функционалы. Как классифицируются (анти)симметричные невырожденные билинейные функционалы. Сформулировать определение евклидовых, псевдоевклидовых и симплектических линейных пространств, ортогональных, псевдоортогональных и симплектических групп.

21. Что такое полуторалинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов? Что такое матрица полуторалинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму? Что такое J - унитарная группа? Что такое эрмитовы и косоэрмитовы функционалы? Как классифицируются невырожденные эрмитовы

функционалы? Сформулировать определение унитарных и псевдоунитарных линейных пространств, унитарных и псевдоунитарных групп.

22. Сформулировать определение и привести примеры линейных пространств. Какие группы называются классическими?

23. Доказать теорему о полярном разложении. Доказать некомпактность общей и специальной линейной группы. Найти компоненты связности общей и специальной линейной группы. Доказать компактность и найти компоненты связности вещественной ортогональной и унитарной группы.

24. Доказать некомпактность и найти компоненты связности псевдоортогональных групп. Доказать некомпактность и связность псевдоунитарных групп.

25. Сформулировать определение линейного представления. Что такое размерность линейного представления, матрица и матричные элементы конечномерного представления? Что такое фундаментальное представление, единичное представление? Сформулировать определение инвариантного подпространства, неприводимого и приводимого представления, сужение представления на подгруппу и на инвариантное подпространство. Проанализировать пример: вещественное и комплексное тождественные представления группы $SO(2)$. Доказать существование неприводимого сужения конечномерного представления.

26. Что такое унитарное представление? Каким свойством обладает матрица конечномерного унитарного представления? Доказать существование инвариантного ортогонального дополнения инвариантного подпространства унитарного представления.

27. Что такое сплетающий оператор линейных представлений, линейное пространство сплетающих операторов? Сформулировать определение эквивалентных представлений. Доказать совпадение матричных элементов конечномерных эквивалентных представлений в некоторых базисах. Доказать одновременную приводимость и неприводимость эквивалентных представлений. Что такое унитарная эквивалентность представлений? Сформулировать теорему об унитарной эквивалентности эквивалентных унитарных представлений.

28. Сформулировать и доказать: первую и вторую леммы Шура, теорему о неприводимых представлениях абелевых групп, вторую лемму Шура для унитарных представлений.

Критерии оценивания. Ответ на каждый вопрос должен быть развернутым, содержать полную логическую цепочку аргументов, необходимые формулы и пояснения к обозначениям. Результаты коллоквиума определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» ставится студенту при правильном ответе не менее чем на 60% вопросов билета.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания.

Экзамен в 6 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Билет содержит два теоретических вопроса, проверяющих компетенции ОПК-2 и ПК-1 в соответствии с индикатором достижения ИОПК-2.2 и ИПК-1.1. Если по результатам текущего контроля студент имеет оценку за коллоквиум «зачтено», то ему разрешается отвечать только на второй теоретический вопрос билета и дополнительные вопросы (из открытого перечня теоретических вопросов п. 2). Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Оценка «отлично» ставится при правильном ответе не менее чем на 90% вопросов билета и дополнительных вопросов. Оценка «хорошо» ставится при правильном ответе не менее чем на 75% вопросов билета и дополнительных вопросов. Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном ответе не менее чем на 60% вопросов билета и дополнительных

вопросов. Оценка «неудовлетворительно» ставится при правильном ответе менее чем на 60% вопросов билета и дополнительных вопросов.

Открытый перечень вопросов, выносимых на экзамен.

1. Определение группы. Единственность единицы и обратного элемента. Коммутативные и некоммутативные группы. Конечные и бесконечные группы. Таблица Кэли конечной группы. Циклические группы конечного и бесконечного порядков.
2. Линейный функционал. Сопряженное пространство. Дуальные базисы в сопряженном пространстве. Сопряженный оператор, матрица сопряженного оператора в дуальном базисе. Контрагredientное представление. Матрица контрагredientного представления в дуальном базисе. Одновременная приводимость и неприводимость линейного представления и контрагredientного ему. Изоморфизм линейного пространства и сопряженного ему, индуцируемый невырожденной билинейной формой.
3. Преобразования факторпространства, индуцированные сдвигами. Каноническая модель и каноническая реализация однородного пространства алгебраической и топологической группы.
4. Теорема о полярном разложении. Некомпактность общей и специальной линейной группы. Компоненты связности и линейной связности общей и специальной линейной группы. Компактность и связность вещественной ортогональной и унитарной группы.
5. Группы эндоморфизмов и автоморфизмов линейного пространства. Общая и специальная линейные группы. Матрица линейного оператора. Естественная топология на общей линейной группе.
6. След оператора. Характер конечномерного представления группы. Свойства характеров конечномерных представлений.
7. Однородные пространства. Примеры. Стационарная группа. Изоморфизм стационарных групп точек однородного пространства. Примеры вычисления стационарных групп. Замкнутость стационарной группы непрерывного действия группы на хаусдорфовом топологическом пространстве.
8. Непрерывные действия топологических групп на топологических пространствах. Каноническая модель и каноническая реализация однородного пространства топологической группы. Замкнутость стационарной группы непрерывного действия группы на хаусдорфовом топологическом пространстве.
9. Симметрическая группа. Определение, принятая запись элементов и правила умножения в симметрической группе. Транспозиции. Представление подстановки в виде произведения транспозиций. Четные и нечетные подстановки. Знакопеременная группа. Универсальность группы в классе конечных групп.
10. Спинорный гомоморфизм. Сюръективность и ядро спинорного гомоморфизма. Контравариантные, ковариантные и сопряженные спиноры. Спинорное представление группы вращений. Двухзначность спинорного представления. Эквивалентность спинорного, контрагredientного и сопряженного ему представлений. Инвариантные спинтензоры. Конвертация векторных индексов в спинорные и наоборот.
11. Орбиты групп преобразований. Разбиение множества на орбиты относительно действия группы. Классы сопряженных элементов.
12. Связные топологические группы. Свойства связной компоненты единицы топологической группы. Гомеоморфизм компонент связности топологической группы. Порождение связной компоненты любой окрестностью единицы.

13. Подгруппа. Характеристические свойства подгруппы. Тривиальные подгруппы. Порядок и индекс подгруппы. Формула для конечной группы. Примеры подгрупп. Замкнутые подгруппы топологической группы. Примеры замкнутых и незамкнутых подгрупп.
14. Связь между представлениями групп $SU(2)$ и $SO(3)$. Реализуемость всех неприводимых представлений группы $SO(3)$ в классе полностью симметричных спинтензоров. Однозначные и двузначные неприводимые представления собственной группы вращений. Реализация однозначных представлений на симметричных бесследовых тензорах. Неприводимые представления полной группы вращений.
15. Примеры групп преобразований: действие группы Галилея на нерелятивистском пространстве времени; действие групп Лоренца и Пуанкаре в пространстве Минковского; группа вращений и группа Евклида n -мерного евклидова пространства.
16. Компактные и локально компактные топологические группы. Равномерная непрерывность. Равномерная непрерывность функций на компактной группе. Локальная компактность общей линейной группы и ее замкнутых подгрупп.
17. Отношение эквивалентности на множестве. Смежные классы по подгруппе. Разбиение группы на смежные классы. Нормальный делитель (инвариантная подгруппа). Тривиальные нормальные делители. Простая группа. Отделимость факторпространства топологической группы по замкнутой подгруппе. Пример нехаусдорфова факторпространства.
18. Неприводимость симметричных спинтензоров. Характеры неприводимых представлений групп $SO(2)$ и $SO(3)$.
19. Билинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов. Матрица билинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму. - ортогональная группа. Симметричные и антисимметричные билинейные функционалы. Классификация (анти)симметричных невырожденных билинейных функционалов. Евклидовы, псевдоевклидовы и симплектические линейные пространства. Ортогональные, псевдоортогональные и симплектические группы.
20. Некомпактность и компоненты связности псевдоортогональных групп. Некомпактность и связность псевдоунитарных групп.
21. Факторгруппа. Определение и корректность умножения в факторгруппе.
22. Топологические группы. Существование симметричной окрестности единицы. Правые и левые сдвиги на группе и индуцируемые ими гомеоморфизмы. Определение топологии на группе базой окрестностей единицы.
23. Полуторалинейная форма на линейном пространстве и группа сохраняющих ее операторов. Матрица полуторалинейной формы и матрица оператора, сохраняющего эту форму. Эрмитовы и косоэрмитовы функционалы. Классификация невырожденных эрмитовых функционалов. Унитарные и псевдоунитарные линейные пространства. Унитарные и псевдоунитарные группы.
24. Линейное топологическое пространство. Замыкание подпространства линейного топологического пространства. Непрерывный линейный оператор. Инвариантность замыкания инвариантного подпространства непрерывного линейного оператора в линейном топологическом пространстве.
25. Центр группы. Основные свойства центра. Центр общей линейной группы.
26. Замкнутые и незамкнутые подгруппы топологической группы. Примеры замкнутых и незамкнутых подгрупп. Естественная топология общей линейной группы и ее подгрупп.
27. Топологические группы. Существование симметричной окрестности единицы. Правые и левые сдвиги на группе и индуцируемые ими гомеоморфизмы. Определение топологии на группе базой окрестностей единицы.

28. Линейное нормированное пространство. Сильная топология линейного нормированного пространства. Превращение линейного нормированного пространства в линейное топологическое пространство. Ограниченные линейные операторы. Норма линейного ограниченного оператора. Эквивалентность непрерывности и ограниченности для линейных операторов в линейном нормированном пространстве.
29. Гомоморфизм групп. Ядро гомоморфизма. Свойства гомоморфизмов групп. Изоморфизм групп. Критерий изоморфизма групп. Непрерывные гомоморфизмы, непрерывные и топологические изоморфизмы топологических групп. Антигомоморфизмы и антиизоморфизмы.
30. Отделимость факторпространства топологической группы по замкнутой подгруппе. Пример нехаусдорфова факторпространства.
31. Правое и левое действие группы на множестве. Представление группы, ассоциированное с действием группы на множестве. Эффективные действия, точные представления, свободные действия. Непрерывное действие топологической группы на топологическом пространстве.
32. Норма в унитарном или гильбертовом линейном пространстве. Непрерывное линейное представление топологической группы. Критерий непрерывности унитарного представления. Топологически эквивалентные представления. Топологически неприводимые представления.
33. Непрерывные гомоморфизмы, непрерывные и топологические изоморфизмы топологических групп. Универсальность канонических гомоморфизмов топологических групп.
34. Примеры групп преобразований: действие группы Галилея на нерелятивистском пространстве времени; действие групп Лоренца и Пуанкаре в пространстве Минковского; группа вращений и группа Евклида n -мерного евклидова пространства.
35. Инвариантное среднее функции на топологической группе. Примеры: инвариантное среднее на конечной группе, на группе $\mathbb{Z}$ и на группе вращений. Теорема о существовании и единственности инвариантного среднего на компактной топологической группе, мера Хаара (без доказательства). Проблема построения инвариантного среднего на некомпактной группе. Инвариантное среднее вектор-функции на компактной топологической группе, его свойства.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тесты (ИОПК-2.2, ИПК-1.1):

1. Группа изометрий евклидовой плоскости является:
 - а) конечной;
 - б) абелевой;
 - в) группой Ли;
 Ключи: в).
2. Порядок группы симметрии правильного треугольника на плоскости равен
 - а) 3;
 - б) 6;
 - в) бесконечности.
 Ключи: б).
3. Фундаментальное представление группы $SO(3)$
 - а) приводимо;
 - б) неприводимо;

в) не вполне приводимо;

Ключи: б) .

4. Любая замкнутая подгруппа в группе Ли

а) компактна;

б) коммутативна;

в) сама является группой Ли;

Ключи: в)

5. Все неприводимые представления компактных групп

а) конечномерны;

б) эквивалентны унитарным;

в) образуют конечное или счетное множество.

Ключи: а), б), в).

Проверка знания основных определений и утверждений:

1. Определение группы.

Ответ: группой называется множество с заданной на нем бинарной операцией умножение, удовлетворяющей трем условиям: ассоциативности, существование единицы и существование обратного элемента.

2. Классификация неприводимых представлений группы $SO(3)$.

Ответ: все неприводимые представления определяются их размерностью, которое может быть произвольным нечетным числом.

3. Привести пример абелевой и неабелевой группы.

Возможный ответ: вещественная прямая как группа по сложению и группа перестановки на трех элементах.

4. Привести пример конечной и бесконечной группы.

Возможный ответ: вещественная прямая как группа по сложению и группа перестановки на трех элементах.

5. Всякая ли бесконечная группа является группой Ли?

Ответ: Нет.

6. Составить таблицу Кэли для группы симметрий квадрата на плоскости.

7. Какие из следующих групп являются компактными: $SU(2)$, $SO(2)$, $SL(2)$, $GL(2)$?

Ответ: первые две.

8. Сформулировать теорему Лагранжа о делимости.

Ответ: порядок подгруппы делит порядок группы.

9. Какие группы Ли называются классическими?

Ответ: группы сохраняющие невырожденные билинейные и полуторалинейные формы.

10. Как связаны группы $SO(3)$ и $SU(2)$?

Ответ: спинорным гомоморфизмом.

Информация о разработчиках

Шарапов Алексей Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры квантовой теории поля физического факультета ТГУ.