

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Вариационное исчисление и методы оптимизации

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
и компьютерных наук**

**Основы научно-исследовательской деятельности в области механики
и математического моделирования**

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- индивидуальное домашнее задание;
- реферат.

Индивидуальное домашнее задание (ИОПК 1.1-1.3)

Задание состоит из 4 задач.

Примеры задач:

Задача 1

Решить экстремальную задачу

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 t^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \inf \\ x(-1) = 1, x(1) = 1. \end{cases}$$

Задача 2

Исследовать отображение на дифференцируемость по Фреше и найти производную

$$f : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 x^3(t) dt.$$

Задача 3

Решить экстремальную задачу

$$\begin{cases} \int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x) dt \rightarrow \text{extr} \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, x(1) = \dot{x}(1) = 0. \end{cases}$$

Задача 4

Решить задачу оптимального управления

$$\begin{cases} B_0 = \int_0^{2023} (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr} \\ |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0. \end{cases}$$

Критерии оценивания:

Результаты индивидуальной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если 3 из 4 решены без ошибок.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если 2 из 4 решены без ошибок. Иначе выставляется оценка «неудовлетворительно».

Примерный перечень тем рефератов:

1. Задача Дидоны. 2. Геометрические задачи. 3. Задача о брахистохроне. 4. Пример Гильберта. 5. Теорема Боголюбова. 6. Уравнение Гамильтона-Якоби-Белмана. 7. Принцип Максимума Понтрягина. 8. Игольчатые вариации.

Критерии оценивания:

Результаты за реферат определяются оценками «зачтено», «не зачтено».

Оценка «зачтено» выставляется, если тема реферата раскрыта и проработан достаточный объем источников. Приведены примеры. Иначе выставляется оценка «не зачтено».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет с оценкой в седьмом семестре проводится с помощью защиты рефератов в течение обучения либо ответ на теоретический вопрос на экзамене.

При этом необходимо предварительно сдать (защитить) задачи, которые предлагались как индивидуальные домашние задания.

Итоговая оценка выставляется как среднее арифметическое оценок за текущий контроль и зачет.

Экзаменационный билет состоит из 1 теоретического вопроса.

Перечень теоретических вопросов:

1. Основные понятия, связанные с экстремальными задачами. Формализация задач. Примеры.
2. Определения производных. Производная по направлению, вариация по Лагранжу. Производная по Гато.
3. Производные Фреше. Строгая дифференцируемость.
4. Основные теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.
5. Теорема о среднем и ее следствия.
6. Лемма о нетривиальности аннулятора.
7. Лемма об аннуляторе ядра регулярного оператора.
8. Изопериметрические задачи. Необходимые условия экстремума.
9. Конечномерные теоремы об обратной и неявной функции. Теорема Люстерника.
10. Теорема о касательном пространстве.
11. Элементы выпуклого анализа. Определения. Теорема Юнга-Фенхеля-Моро.
12. Основные формулы субдифференциального исчисления. Теорема Моро-Рокафеллера.
13. Выпуклые функции. Их свойства. Операции над ними.
14. Элементы теории выпуклых множеств и функций.

15. Выпуклые множества, достаточные условия выпуклости множеств, проекция точки на выпуклое множество,
16. Теоремы отделимости.
17. Выпуклые функции и их свойства. Критерии выпуклости дифференцируемых и дважды выпуклых функций.
18. Выпуклое программирование. Постановка задачи выпуклого программирования и ее свойства.
19. Необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.
20. Функция Лагранжа. Достаточные условия регулярности задачи.
21. Теорема Куна-Таккера (доказательство - для гладкой задачи с ограничениями типа неравенства).
22. Интерпретация теоремы Куна-Таккера.
23. Обобщения теоремы Куна-Таккера.
24. Выпуклые задачи. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании
25. Задачи выпуклого программирования. Правило множителей Лагранжа.
26. Полунепрерывные снизу и полукомпактные функции.
27. Различные эквивалентные определения полунепрерывных снизу функций.
28. Ограниченность снизу любой полунепрерывной снизу функции.
29. Опорные функции и теорема Минковского.
30. Функция Вейерштрасса и условия ее выпуклости.
31. Сопряженные функции и их свойства.
32. Преобразование Юнга-Фенхеля-Моро. Теорема Фенхеля-Моро.
33. Экономическая интерпретация.
34. Свойства сопряженных функций.
35. Субдифференциальное исчисление.
36. Понятие субдифференциала.
37. Выпуклость и замкнутость субдифференциала в нормированном пространстве.
38. Субдифференциал нормы.
39. Теорема Моро-Рокафеллора.
40. Теорема о субдифференциале суперпозиции
41. Теорема Ферма о локальном минимуме.
42. Гладкая задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Общий случай. Постановка задачи. Необходимое условие экстремума.
43. Выпуклые задачи. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании.
44. Теорема Куна-Таккера (субдифференциальная форма).
45. Теория двойственности экстремальных задач.
46. Задача Больца. Необходимые условия экстремума.
47. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума. Интегралы уравнения Эйлера.
48. Изопериметрические задачи. Необходимые условия экстремума.
49. Теорема Крейна - Мильмана.
50. Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина.
51. Постановка задач. Связь с задачами вариационного исчисления.
52. Принцип максимума Понтрягина и его применения.
53. Связь принципа максимума с задачами вариационного исчисления. Примеры.
54. Задача Лагранжа. Теорема Эйлера-Лагранжа.
55. Принцип Лагранжа исследования задач с ограничениями. Пример.

Критерии оценивания:

| Неудовлетворительно | Удовлетворительно | Хорошо | Отлично |
|---|---|--|--|
| Дан неправильный ответ, однозначно неправильная трактовка темы. | В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения. Знание минимума литературы. | Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано. Знание основной литературы. | Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в билете вопрос. Знание основной и дополнительной литературы. |

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест

1. Необходимое условие экстремума для вариационной задачи (ИОПК-1.1.):
 - а) уравнение Лагранжа
 - б) уравнение Больца
 - в) уравнение Бернулли
 - г) уравнение Эйлера

2. Для указанной вариационной задачи

$$\int_0^1 (1 + \dot{x}^2(t)) dt$$

найти экстремаль, удовлетворяющую условиям $x(0)=19$, $x(1)=30$ (ИОПК 1.1-1.3):

- а) $x(t)=11t+19$
 - б) $x(t)=-11t-19$
 - в) $x(t)=11t-19$
 - г) $x(t)=19t+11$
3. Найти производную указанного функционала (ИОПК 1.1-1.3)

$$f : H \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \langle x, x \rangle,$$

где H – гильбертово пространство:

- а) $\langle \hat{x}, x \rangle$
- б) $\langle \hat{x}, x \rangle + 1$
- в) $2\langle \hat{x}, x \rangle$
- г) $2\langle \hat{x}, x \rangle + 1$

Ключи: 1 г), 2 а), 3 в).

Информация о разработчиках

Пчелинцев Валерий Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, кафедры математического анализа и теории функций, доцент.