

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Алгебра и геометрия

по направлению подготовки

09.03.03 Прикладная информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Искусственный интеллект и большие данные

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
С.П. Сущенко

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Обладает необходимыми естественнонаучными и общетехническими знаниями для исследования информационных систем и их компонент

ИОПК-1.2 Использует фундаментальные знания, полученные в области математических, естественных и общетехнических наук в профессиональной деятельности

ИОПК-1.3 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических, естественных и общетехнических наук для моделирования и анализа задач

2. Оценочные материалы текущего контроля критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- тесты;
- коллоквиум;
- контрольная работа.

Тест (ИОПК-1.1.)

1. Отметьте преобразования матриц, не являющиеся элементарными
 - а) прибавление ко всем элементам какой-либо строки (столбца) матрицы числа, отличного от нуля
 - б) перестановка двух любых строк (столбцов) матрицы
 - в) умножение столбца (строки) на число, отличное от нуля
 - г) транспонирование матрицы
 - д) деление всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на любое отличное от нуля число
 - е) прибавление к столбцу (строке) линейной комбинации других столбцов (строк)
2. Выберите верное утверждение
 - а) При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ранг матрицы не меняется
 - б) При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на любое отличное от нуля число ранг матрицы умножается на это число
 - в) При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на любое отличное от нуля число ранг матрицы не изменится
 - г) Если в матрице одна из строк (столбцов) является линейной комбинацией других строк (столбцов), то ее ранг равен нулю
 - д) При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ранг матрицы меняет знак
3. Если матрица размера $(n \times n)$ является вырожденной, то ее ранг
 - а) $r < n$
 - б) $r > n$
 - в) $r = n$
4. Найдите матрицу $C = A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В ответ введите сумму элементов первой строки матрицы.
5. Выберите уравнение линии, описывающее гиперболу

- а) $y^2 - 2x^2 = 3x$
- б) $x^2 - y^2 = 2$
- в) $(y-2)^2 = 5(x+3)^2 + 10$
- г) $2x + 3y = 0$
- д) $y^2 + 3x = 9$

Ключи: 1 а), 2 а), в); 3 в); 4 -18; 5 а), б), в).

Критерии оценивания: тест считается пройденным, если обучающий ответил правильно как минимум на половину вопросов.

Коллоквиум (ИОПК-1.1, ИОПК-1.2).

Коллоквиум состоит из двух теоретических вопросов.

1. Определение матрицы. Арифметические операции над матрицами.
2. Определитель и элементарные преобразования. Вычисление определителя разложением по строке или столбцу.
3. Обратная матрица. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений и элементарными преобразованиями.
4. Ранг матрицы: элементарные преобразования, ранг ступенчатой матрицы, метод базисных миноров.
5. Определение системы алгебраических линейных уравнений.
6. Теорема Кронекера-Капелли.
7. Метод Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений.
8. Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.
9. Системы однородных линейных алгебраических уравнений. Построение фундаментальной системы решений ОСЛУ.
10. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).
11. Вывод уравнения плоскости, заданной точкой M_0 и перпендикулярным вектором N . Общее уравнение плоскости.
12. Вывод уравнения плоскости, заданной точкой M_0 и двумя направляющими векторами. Параметрическое уравнение плоскости (вывод).
13. Уравнение плоскости в «отрезках» (вывод).
14. Неполные уравнения плоскости (таблица + рисунки)
15. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между плоскостями. (с объяснением)
16. Расстояние от точки до плоскости (вывод)
17. Вывод уравнения прямой линии l , проходящей через точку M_0 в направлении вектора p .
18. Вывод параметрического уравнения и канонического уравнения прямой линии в пространстве
19. Уравнение прямой линии в пространстве, проходящей через две заданные точки (вывод)
20. Общее уравнение прямой линии в пространстве. Преобразование общего уравнения прямой линии к каноническому и параметрическому виду
21. Взаимное расположение прямой и плоскости
22. Угол между прямой и плоскостью
23. Угол между двумя прямыми.
24. Расстояние точки до прямой линии в пространстве
25. Взаимное расположение двух прямых в пространстве
26. Кривая 2-ого порядка на плоскости и её общее уравнение. Классификация кривых

27. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса. Построение эллипса. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, общее геометрическое свойство точек эллипса.
28. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Построение гиперболы. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, асимптоты, общее геометрическое свойство точек гиперболы.
29. Парабола. Каноническое уравнение параболы. Построение параболы. Вершина, фокус, эксцентриситет, директриса, общее геометрическое свойство точек параболы.
30. Сфера. Эллипсоид. Канонические уравнения и графики.
31. Гиперболоиды (однополостной и двуполостной). Канонические уравнения и графики.
32. Параболоиды (эллиптический и гиперболический). Канонические уравнения и графики.
33. Цилиндры (эллиптический, гиперболический, параболический), их уравнения и графики.

Контрольная работа (ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

Контрольная работа состоит из 5 практических задач.

Примеры задач для контрольных работ:

1. Вычислить $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.
2. Решить матричное уравнение $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$.
3. Вычислить определитель путем разложения строки или столбца, применяя элементарные преобразования

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$
4. Найти обратную матрицу $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
5. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$
 - а) методом Крамера (записать формулы);
 - б) методом Гаусса.
6. Сформулировать Теорему Кронекера – Капелли. Методом Гаусса найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

7. Для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

а) дать определение и найти фундаментальную систему решений;

б) построить общее решение

8. Доказать, что векторы $\vec{p} = (0; 1; 2)$, $\vec{q} = (1; 0; 1)$, $\vec{r} = (-1; 2; 4)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{x} = (-2; 4; 7)$ в этом базисе.

9. Найти координаты вектора $\vec{x}$, коллинеарного вектору $\vec{b} = (-2; 3; 5)$ и удовлетворяющего условию $(\vec{x}, \vec{b}) = 3$

10. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$,

$(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/3$. Найти:

1) длины диагоналей параллелограмма;

2) $Pr_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$;

3) площадь параллелограмма.

11. Даны координаты вершин тетраэдра $A_1(1; 3; 6)$, $A_2(2; 2; 1)$, $A_3(-1; 0; 1)$, $A_4(-4; 6; -3)$.

Найти объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, 2, 6)$

перпендикулярно вектору $\vec{N} = (2, 2, -1)$.

2. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M(-3, -1, 2)$ параллельно вектору $\vec{s} = (1, -2, 0)$.

3. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}$ и плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$

4. Выяснить взаимное расположение прямых в пространстве

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \text{ и } \begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$$

5. Напишите названия поверхностей, уравнения которых имеют вид:

1) $3(x-1)^2 = 6 + 2(y+1)^2$ 2) $\frac{(z-1)^2}{2} = x^2 + y^2$

3) $y^2 + z^2 = \frac{x^2}{3} + 1$ 4) $(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 2z$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок, правильно оформлены решения задач, записаны все используемые формулы и теоремы.

Оценка «хорошо» выставляется, если записаны все используемые в решении формулы и теоремы, однако допущены незначительные ошибки в вычислениях.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решены три задачи из пяти предложенных, записаны некоторые из используемых в решении формул и теорем, допущены незначительные ошибки в вычислениях.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если решено менее трех задач из предложенных, не записаны используемые в решении формулы и теоремы, допущены ошибки в вычислениях.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из двух частей.

Первая часть представляет собой два теоретических вопроса, проверяющих ИОПК-1.1, ИОПК-1.2. Ответы на вопросы первой части предполагают формулировки определений, теорем и доказательств.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.3. Ответ на вопрос второй части дается в виде решения задачи в развернутой форме и краткой интерпретации результатов.

Перечень теоретических вопросов:

1. Вопрос 1. Определение матрицы. Арифметические операции над матрицами
2. Вопрос 2. Определитель и элементарные преобразования. Вычисление определителя разложением по строке или столбцу
3. Вопрос 3. Обратная матрица. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений и элементарными преобразованиями
4. Вопрос 4. Ранг матрицы: элементарные преобразования, ранг ступенчатой матрицы, метод базисных миноров.
5. Вопрос 5. Определение системы алгебраических линейных уравнений.
6. Вопрос 6. Теорема Кронекера-Капелли.
7. Вопрос 7. Метод Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений.
8. Вопрос 8. Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.
9. Вопрос 9. Системы однородных линейных алгебраических уравнений. Построение фундаментальной системы решений ОСЛУ.
10. Вопрос 10. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов)
11. Вопрос 11. Вывод уравнения плоскости, заданной точкой M_0 и перпендикулярным вектором N . Общее уравнение плоскости.
12. Вопрос 12. Вывод уравнения плоскости, заданной точкой M_0 и двумя направляющими векторами. Параметрическое уравнение плоскости (вывод).
13. Вопрос 13. Уравнение плоскости в «отрезках» (вывод).
14. Вопрос 14. Неполные уравнения плоскости (таблица + рисунки).
15. Вопрос 15. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между плоскостями. (с объяснением).
16. Вопрос 16. Расстояние от точки до плоскости (вывод)
17. Вопрос 17. Вывод уравнения прямой линии l , проходящей через точку M_0 в направлении вектора p .
18. Вопрос 18. Вывод параметрического уравнения и канонического уравнения прямой линии в пространстве.
19. Вопрос 19. Уравнение прямой линии в пространстве, проходящей через две заданные точки (вывод).
20. Вопрос 20. Общее уравнение прямой линии в пространстве. Преобразование общего уравнения прямой линии к каноническому и параметрическому виду
21. Вопрос 21. Взаимное расположение прямой и плоскости
22. Вопрос 22. Кривая 2-ого порядка на плоскости и её общее уравнение. Классификация кривых.

23. Вопрос 23. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса. Построение эллипса. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, общее геометрическое свойство точек эллипса.

24. Вопрос 24. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Построение гиперболы. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, асимптоты, общее геометрическое свойство точек гиперболы.

25. Вопрос 25. Парабола. Каноническое уравнение параболы. Построение параболы. Вершина, фокус, эксцентриситет, директриса, общее геометрическое свойство точек параболы.

26. Вопрос 26. Сфера. Эллипсоид. Канонические уравнения и графики.

27. Вопрос 27. Гиперболоиды (однополостной и двуполостной). Канонические уравнения и графики.

28. Вопрос 28. Параболоиды (эллиптический и гиперболический). Канонические уравнения и графики.

29. Вопрос 29. Цилиндры (эллиптический, гиперболический, параболический), их уравнения и графики.

Примеры задач:

1. Задача 1. Исследовать и построить поверхность заданную уравнением $x^2 - z^2 = 8y$

2. Задача 2. Исследовать и построить поверхность заданную уравнением $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$

3. Задача 3. Исследовать и построить поверхность заданную уравнением $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$

4. Задача 4. Исследовать и построить поверхность заданную уравнением $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 2y$

5. Задача 5. Исследовать и построить поверхность заданную уравнением $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

6. Задача 6. Исследовать и построить поверхность заданную уравнением $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если на теоретические вопросы даны развернутые ответы и все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если на теоретические вопросы даны развернутые ответы и все задачи решены, однако имеются незначительные неточности в ответах и незначительные вычислительные ошибки.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если приведены свойства или формулировки теорем (доказательства с ошибками или не полные), рассмотрены частные случаи. Правильно решена задача

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если ответ не содержит теоретической части и/или не решена задача.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи

Задача 1 (ИОПК-1.2)

Завод производит автомобили. Каждый автомобиль может находиться в одном из двух состояний: 1) работает хорошо; 2) требует регулировки. Статистические исследования показали, что из тех автомобилей, которые сегодня работают хорошо, через месяц 70% также будут работать хорошо и 30% потребуют регулировки, а из тех автомобилей, которые сегодня потребовали регулировки, через месяц 60% будут работать хорошо и 40% потребуют регулировки.

В момент изготовления все автомобили работают хорошо.

Каковы доли машин, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через 2 месяца и через 3 месяца после их выхода из ворот завода?

Задача 2 (ИОПК-1.2, ИОПК -1.3)

На ремонтный завод поступают агрегаты, 70% которых требуют малого ремонта, 20% - среднего ремонта, 10% - капитального ремонта. Статистически установлено, что 10% машин, прошедших малый ремонт, через месяц требуют малого ремонта, 60% - среднего ремонта и 30% - капитального ремонта. Из машин, прошедших средний ремонт, 20% требуют через месяц малого ремонта, 50% - среднего ремонта и 30% - капитального ремонта. Из машин, прошедших капитальный ремонт, через месяц 60% требуют малого ремонта, 40% - среднего ремонта. Найти доли из отремонтированных в начале месяца машин, которые будут требовать ремонта того или иного вида через месяц, 2 месяца и 3 месяца?

Ответы:

Задача 1. (0,67; 0,33); (0,667; 0,333)

Задача 2. через месяц 17% тракторов будет требовать малого ремонта, 56% - среднего ремонта и 27% - капитального ремонта; через 2 месяца эти доли равны соответственно 29,1%, 49%, 21,9%; через 3 месяца – 25,85%, 50,72%, 23,43%.

Информация о разработчиках

Моисеева Светлана Петровна, доктор физико-математических, профессор, и.о. зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики НИ Томского государственного университета.

Пауль Светлана Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики ТГУ;

Шкленник Мария Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики ТГУ;

Полин Евгений Павлович, ассистент кафедры теории вероятностей и математической статистики ТГУ.