

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:  
Директор  
А. В. Замятин

Рабочая программа дисциплины

**Теория оптимального управления**

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**Математическое моделирование и информационные системы**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Бакалавр**

Год приема  
**2024**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
К.И. Лившиц

Председатель УМК  
С.П. Сущенко

Томск – 2024

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ПК-3 Способен формализовывать, согласовывать и документировать требования к системе и подсистеме, обрабатывать запросы на изменение требований к системе и подсистеме, выявлять и формализовывать риски, анализировать проблемные ситуации..

УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4 Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИПК-3.1 Реализовывает построение формализованной математической модели системы (подсистемы), введение целевой функции системы, подсистемы и ограничений, соответствующих требованиям к системе (подсистеме).

ИПК-3.2 Адаптирует формализованную математическую модель системы (подсистемы) к изменению требований (ограничений к целевой функции) к системе (подсистеме).

ИПК-3.3 Выявляет и формализовывает в виде математической модели возникающие при функционировании системы (подсистемы) риски; выявляет и анализирует проблемные ситуации.

ИУК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение.

ИУК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений.

ИУК-2.3 Решает конкретные задачи (исследования, проекта, деятельности) за установленное время.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

Задачами освоения дисциплины является привитие студентам навыков работы с учебной литературой по теории оптимального управления, обучение студентов основным понятиям теории оптимального управления, умению решать типовые задачи, умению пользоваться методами теории оптимального управления при решении практических задач и исследовании математических моделей технических и социально-экономических систем с целью их оптимизации.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Дисциплина входит в модуль Модуль «Математика».

#### **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Шестой семестр, экзамен

#### **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Математический анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Дифференциальные уравнения».

#### **6. Язык реализации**

Русский

#### **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:

-лекции: 64 ч.

-лабораторные: 16 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

#### **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

##### **Тема 1. Введение в теорию управления.**

Математическая модель объекта. Критерии оптимальности. Допустимые управления. Дополнительные условия. Формулировка задачи оптимального управления. Примеры постановки задач оптимального управления. Задача оптимального управления производством, хранением и сбытом товара. Оптимальное управление односекторной экономикой на конечном интервале времени. Динамическая модель рекламы в задаче страхования.

##### **Тема 2. Общая теория линейных систем управления**

Переходная матрица, ее свойства и методы построения. Ряд Пеано. Спектральное представление переходной матрицы. Представление в виде суммы степеней матрицы. Критерии устойчивости линейных систем: спектральный критерий, критерий Рауса-Гурвица, критерий Ляпунова. Свойства уравнения Ляпунова. Исследование колебательного контура. Анализ линейных дискретных систем. Критерии устойчивости: спектральный критерий устойчивости, критерий Ляпунова. Поведение линейных систем при внешних возмущениях. Передаточная матрица. Постоянное управление. Задача слежения.

##### **Тема 3. Управляемость и наблюдаемость**

Критерии управляемости. Критерии наблюдаемости. Общая декомпозиция линейной системы по Калману.

##### **Тема 4. Синтез регуляторов и наблюдателей**

Синтез регуляторов и наблюдателей. Общий принцип регулируемости. Метод АКОР для непрерывных систем. Метод АКОР для дискретных систем. Модальное управление. Вычисление матрицы регулятора. Выбор заданного спектра. Синтез полных наблюдателей. Наблюдатель Луенбергера. Фильтр Калмана для непрерывных систем. Фильтр Калмана для дискретных систем.

##### **Тема 5. Вариационное исчисление**

Вариационное исчисление. Содержание метода. Вариация функционала. Функция Гамильтона. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Задача Больца. Примеры. Задачи с ограничениями на правый конец траектории. Задача с произвольным временем и без

ограничений на правый конец траектории. Задача с ограничениями общего вида. Примеры.

Исследование второй вариации функционала. Квадратические функционалы. Достаточные условия положительности второй вариации. Условие Лежандра-Клебша. Второе достаточное условие положительной определенности второй вариации. Присоединенная задача. Условие Якоби. Свойства уравнения Риккати. Примеры.

#### **Тема 6. Принцип максимума Понтрягина.**

Принцип максимума Понтрягина. Содержание метода. Недостатки вариационного метода. Игольчатая вариация. Принцип максимума. Особое управление. Оптимальное по быстродействию управление для линейных систем. Примеры.

#### **Тема 7. Динамическое программирование.**

Динамическое программирование. Содержание метода. Функция Беллмана. Уравнение Беллмана. Связь с принципом максимума Понтрягина. Решение задачи АКОР. Управление линейной системой с ограничениями на правый конец траектории. Примеры.

### **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки усвоения лекционного материала при выполнении лабораторных работ, проведению контрольных работ по лекционному материалу и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Оценочные материалы текущего контроля размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

### **10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

Экзамен в шестом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из двух частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

## **ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК Кафедра Прикладной математики**

Экзаменационный билет № 20 по дисциплине «Теория оптимального управления»

1. Синтез полных наблюдателей.
2. Функция Беллмана. Уравнение Беллмана.

Зав. каф. ПМ, д.т.н., профессор

А.М. Горцев

Дополнительно обучающемуся задаются 1-2 вопроса из нижеследующего перечня.

Дополнительные вопросы для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена

1. Что понимается под непрерывной динамической системой.
2. Что понимается под дискретной динамической системой.
3. Критерий оптимальности в форме Больца.
4. Критерий оптимальности в форме Лагранжа.
5. Критерий оптимальности в Форме Майера.
6. Что понимается под допустимыми управлениями.
7. Какие ограничения могут накладываться на управления и траектории.
8. Что такое линеаризация.
9. Формулировка задачи оптимального управления.
10. Переходная матрица и ее свойства.

11. Устойчивость. Критерии устойчивости.
12. Управляемость. Критерии управляемости.
13. Наблюдаемость. Критерии наблюдаемости.
14. Каноническая форма Калмана.
15. Модальное управление.
16. Задача Летова-Калмана.
17. Полный наблюдатель.
18. Наблюдатель Луенбергера.
19. Фильтр Калмана. для дискретных систем.
20. Задача Летова-Калмана в стохастическом случае.
21. Основная идея вариационного исчисления.
22. Функция Гамильтона в задаче вариационного исчисления.
23. Уравнения Эйлера-Лагранжа для задачи Майера.
24. Уравнения Эйлера-Лагранжа для задачи Больца.
25. Вариационная задача с произвольным временем. Дополнительные условия.
26. Вариационная задача с ограничениями общего вида. Дополнительные условия.
27. Вторая вариация функционала. Достаточные условия положительности второй вариации.
28. Условие Лежандра-Клебша.
29. Присоединенная задача.
30. Условие Якоби.
31. Понятие игольчатой вариации.
32. Принцип максимума применительно к задаче Майера.
33. Принцип максимума применительно к задаче Лагранжа.
34. Принцип максимума применительно к задаче Больца.
35. Понятие особого управления.
36. Построение оптимального по быстродействию управления для линейных систем.
37. Идея метода динамического программирования.
38. Функция Беллмана.
39. Уравнение Беллмана.
40. Уравнение Беллмана в задаче с произвольным временем.
41. Уравнение Беллмана при ограничениях на правый конец траектории.
42. Связь метода динамического программирования с принципом максимума.
43. Оптимальное по Беллману управление линейной системой при квадратичном критерии.
44. Управление линейной системой при ограничениях на правый конец траектории.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

### **Критерии формирования оценок при проведении экзамена**

Оценки при проведении экзамена формируются в соответствии с нижеприведенной таблицей.

| 2                                           | 3                                                                           | 4                                                                   | 5                                                                      |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Не ответил ни на один из основных вопросов. | Ответил на один из основных вопросов и на один - два из трех дополнительных | Ответил на оба вопроса, содержащихся в экзаменационном билете, и на | Уверенно и правильно ответил на все основные и дополнительные вопросы. |

|  |           |                                                 |  |
|--|-----------|-------------------------------------------------|--|
|  | вопросов. | дополнительные<br>вопросы, но с<br>замечаниями. |  |
|--|-----------|-------------------------------------------------|--|

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

### **11. Учебно-методическое обеспечение**

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=00000>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План лабораторных работ дисциплине.

1. Знакомство с пакетом «Управление».
2. Устойчивость непрерывных и дискретных систем.
3. Модальное управление.
4. Динамический наблюдатель.
5. Фильтр Калмана для дискретных систем.
6. Фильтр Калмана для непрерывных систем.
7. Задача оптимального быстрогодействия.

г) Методические указания по проведению лабораторных работ.

Методические указания по выполнению лабораторных работ содержатся в литературе из перечня учебной литературы.

д) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Основой обучения является курс лекций, читаемый преподавателем, а также выполнение лабораторных работ, при выполнении которых путем имитационного моделирования исследуются предложенные ранее алгоритмы управления. Для самостоятельной работы и дополнительного расширения круга знаний рекомендуется использовать литературу, приведенную в разделе 12, а также информационные системы, приведенные в разделе 13.

Примеры решения типовых задач теории оптимального управления можно найти в перечне учебной литературы. Методические указания к выполнению лабораторных работ содержатся в перечне учебной литературы

### **12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет**

а) основная литература:

–Лившиц К.И., Параев Ю.И. Теории управления: учебник / К.И. Лившиц [и др.]. – СПб: Лань, 2020. – 232 с.

– Абдрахманов В.Г., Рабчук А.В. Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания / В.Г. Абдрахманов [и др.]. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 112 с.

б) дополнительная литература:

- Параев Ю.И., Цветницкая С.А. Устойчивость линейных систем: учеб. - метод. пособие по курсу «Теория управления» / Ю. И. Параев [и др.]. – Томск: ТГУ, 2009. – 22 с.
- Параев Ю.И. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов для непрерывных и дискретных систем: учеб. - метод. пособие по курсу «Теория управления» / Ю.И. Параев. – Томск: ТГУ, 2009. – 19 с.
- Параев Ю.И. Фильтр Калмана для непрерывных и дискретных систем: учеб. - метод. пособие по курсу «Теория управления» / Ю.И. Параев. – Томск: ТГУ, 2009. – 19 с.
- Параев Ю.И. Задача оптимального быстрогодействия: учеб. - метод. пособие по курсу «Теория управления» / Ю.И. Параев. – Томск: ТГУ, 2010. – 16 с.
- Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак [и др.]. – М.: Мир, 1977. – 652 с.
- Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. – М.: Наука, 1983. – 393 с.
- Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: учебное пособие / Б.А. Лагоша. – М.: Моск. гос. ун-та экономики, статистики и информатики, 2004. – 133 с.
- Брайсон А., Ю-Ши Хо Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон [и др.]. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
- Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление: учебник / Я.Н. Ройтенберг. – М.: Наука. 1992. – 576 с.
- Смагин В.И. Динамические регуляторы: учеб. - метод. пособие по курсу «Теория управления» / В.И. Смагин. – Томск: ТГУ, 2004. – 18 с.
- Параев Ю.И., Смагин В.И. Динамические наблюдатели: учеб. - метод. пособие по курсу «Теория управления» / Ю.И. Параев [и др.]. – Томск: ТГУ, 2004. – 25 с.
- Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во Иностранная литература, 1960. – 400 с.

в) ресурсы сети Интернет:

– открытые онлайн-курсы

### **13. Перечень информационных технологий**

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).
- Пакет «**Управление**», разработанный на кафедре прикладной математики ТГУ

б) информационные справочные системы:

- «Образовательный математический сайт Exponenta.ru». – URL: <http://www.exponenta.ru>.
- «Образовательный математический сайт Math.ru». – URL: <http://www.math.ru>
- Онлайн-библиотека: точные науки. – URL : [http://www.edu\\_lib/net](http://www.edu_lib/net) .
- Электронно-библиотечная система Издательства Лань [Электронный ресурс]/ Издательство «Лань». – Электрон. дан. – URL: <https://e.lanbook.com/>
- Электронная библиотека ТГУ: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>.
- ScienceDirect [Electronic resource] / Elsevier B.V. – Electronic data. – Amsterdam, Netherlands, 2016. – URL: <http://www.sciencedirect.com/>

#### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Для проведения лабораторных работ необходима аудитория, оборудованные персональными компьютерами, на которых установлен пакет «Управление», разработанный на кафедре прикладной математики ТГУ.

#### **15. Информация о разработчиках**

Смагин Валерий Иванович, д.т.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики ИПМиКН.