Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Общая алгебра

по направлению подготовки / специальности

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Современная математика и математическое моделирование

Форма обучения
Очная

Квалификация
Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь

Год приема
2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Экзаменационные вопросы (РООПК 1.2, РООПК 1.3).

1. Евклидовы пространства. Свойства ортонормированных баз.
2. Ортогональные операторы евклидовых пространств. Критерий ортогональности линейного оператора.
3. Унитарные и самосопряженные операторы.
4. Нормальные операторы. Неотрицательные самосопряженные линейные операторы. Полярные разложения.
5. Эквивалентность λ-матриц. Признаки эквивалентности.
6. Унимодулярные λ-матрицы. Теорема о подобии матриц.
7. Приведение матриц к жордановой нормальной форме.
8. Теорема о минимальном многочлене.
9. Теорема Гамильтона-Кэли.
10. Билинейные формы. Матрица квадратичной формы. Канонический базис.
11. Теорема Лагранжа и алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид.
12. Закон инерции квадратичных форм.
13. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Квадратичные формы на евклидовых пространствах.
14. Приведение к главным осям.
15. Понятие кольца. Простейшие свойства. Делители нуля, нильпотентные, центральные и идемпотентные элементы кольца. Кольца вычетов. Целостные кольца, примеры.
16. Центр кольца. Группа обратимых элементов кольца.
17. Алгебраические и трансцендентные элементы над кольцами.
18. Факториальные кольца, примеры. Признаки делимости.
19. Теоремы о гомоморфизмах колец.
20. Евклидовы кольца. Кольцо целых гауссовых чисел.
21. Кольца главных идеалов.
22. Прямые суммы колец.
23. Теорема о факториальности кольца многочленов.
24. Поле дробей. Теорема о простых полях.
25. Неприводимые многочлены. Критерии неприводимости.

Элементы текущего контроля:

Предусмотрены 3 контрольных работ.

Пример 1 (РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Следующую ортонормированную систему векторов дополнить до ортонормированного базиса: a = (2/3, –1/3, 2/3), b = (1/3, –2/3, –2/3).

Ответ. c = (2/3, 2/3, –1/3).

Пример 2 (РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Найти нормальный вид в области вещественных чисел следующих квадратичных форм:

а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_2x_4$.

б) $x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 - 2x_3x_4$.

Ответ. а) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$, б) $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2$.

Пример 3 (РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Найти жорданову форму матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

За решение задач начисляются баллы от 0 до 100.

Оценка «отлично» выставляется за 81–100 баллов, «хорошо» выставляется при получении 61–80 баллов, «удовлетворительно» выставляется за 45–60 баллов, «неудовлетворительно» выставляется при получении менее 44 баллов.

Темы реферативных работ (РООПК 1.2): «Математический гений К.Ф. Гаусса», «Вклад российских математиков в развитие алгебры 20 столетия», «Ф.Э. Молин, ученый и педагог», «Теория групп в трудах российских математиков» и др. Рефераты выполняются по желанию студентов, за их выполнение начисляются дополнительные баллы.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в шестом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Примеры вопросов первой части:

А) (РООПК 1.2) Пусть группа имеет счетное множество порождающих элементов. Что можно сказать о мощности самой группы?

Выберите один ответ:

1. Группа имеет не более, чем счетную мощность.
2. Мощность самой группы может быть произвольной.
3. Группа имеет счетную мощность.
4. Группа имеет не более, чем континуальную мощность.
5. Если порядки порождающих элементов конечны, то группа конечна.

Б) Выберите один ответ. Коммутативная группа называется:

1. Абелевой в честь норвежского математика Н. Абеля.
2. Перестановочной.
3. Симметрической.
4. Хорошей.
5. Суммируемой.

Примеры вопросов второй части (РООПК 1.3):

1. Докажите теорему о коммутанте группы.
2. Докажите теорему о единственности канонического вида λ-матрицы.

3. Докажите теорему о методе Лагранжа приведения квадратичные формы к каноническому виду.

Примеры вопросов второй части.

А) теоретические вопросы.

1) Дайте определение ядра кольцевого гомоморфизма, будет ли это ядро идеалом кольца?

2) Является ли пересечение некоторого семейства подгрупп данной группы подгруппой исходной группы? И что можно сказать об объединении подгрупп этого семейства?

3) Что называется характеристикой поля, каковы свойства этой характеристики?

Б) Примеры задач (РООПК 1.2, РООПК 1.3).

1) Следующую ортонормированную систему векторов дополнить до ортонормированного базиса: $a = (2/3, -1/3, 2/3)$, $b = (1/3, -2/3, -2/3)$.

2) Найти нормальный вид в области вещественных чисел следующей квадратичной формы $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_2x_4$.

3) При помощи элементарных преобразований привести к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2+3\lambda \\ \lambda^3+1 & \lambda^2-2 & \lambda+3 \\ 5\lambda & 3\lambda^2+1 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Инд. задание в системе Moodle.	20%	В течение семестра	По 100-бальной системе.
Тесты в системе Moodle.	20%	В течение семестра	Максимальное использование возможностей программы
Экзамен	60%	В конце семестра	Студент допускается до экзамена только при наличии выполненных индивидуального задания и теста. 1) Полный ответ, изложенный кратко и ясно – «отлично». 2) Ответ неполный (но > 70%), пояснения логически непротиворечивы – «хорошо». 3) Ответ неполный (но >50%), отсутствие логики в пояснениях – «удовлетворительно». 4) Ответ неполный (<50%), отсутствие логики в пояснениях или по сути отсутствует – «неудовлетворительно».

Студенты, не выполнившие тесты или контрольные работы, получают дополнительно идентичные задачи и вопросы, после их решения и положительного ответа получают билет для экзамена.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи (РООПК 1.2, РООПК 1.3).

1) Докажите, что если целостное кольцо K является кольцо с разложением, то его факториальность имеет место тогда и только тогда, когда любой простой элемент p, делящий произведение ab, делит по крайней мере один из множителей a, b.

2) Линейное преобразование L евклидова пространства в базисе из векторов $\boldsymbol{f}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 0)$ задано матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Найти матрицу сопряженного преобразования L* в том же базисе, считая, что координаты векторов базиса даны в некотором ортонормированном базисе.

Ответ: $\begin{bmatrix} -27 & -31 & -9 \\ 33/2 & 21 & 5 \\ 61/2 & 30 & 12 \end{bmatrix}$

3) Найти базис ортогонального дополнения подпространства, порожденного векторами

$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, -2, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 2, 1)$.

Ответ: (0, –2, 1/2, 1).

Информация о разработчиках

Чехлов Андрей Ростиславович, д.ф.-м.н., профессор каф. алгебры ТГУ.