Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Группы и алгебры Ли
по направлению подготовки

03.03.02 Физика
Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная и прикладная физика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
С.Н. Филимонов

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-2 – Способен проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные;

– ПК-1 – Способен проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 2.2 – Анализирует и интерпретирует экспериментальные и теоретические данные, полученные в ходе научного исследования, обобщает полученные результаты, формулирует научно обоснованные;

ИПК 1.1 – Собирает и анализирует научно-техническую информацию по теме исследования, обобщает научные данные в соответствии с задачами исследования .

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля: контрольная работа (ИОПК 2.2, ИПК 1.1).

По дисциплине «Группы и алгебры Ли» предусмотрены две контрольные работы. Каждая контрольная работа состоит из пяти задач из открытого банка задач и проводится в форме индивидуального собеседования.

Открытый банк задач для контрольных работ

1. Найти генераторы вращений $(SO(3,R),R^3)$ в трехмерном евклидовом пространстве. Найти генераторы действия $(SO(3,R),S^2)$ группы вращений на сфере.

2. Пусть $\{\tilde{A}_{\vec{k}};\vec{k}\in R^3\}$ — генераторы конечномерного линейного представления $(T,SO(3,R),V)$ группы вращений. Докажите, что для любого $g_0\in SO(3,R)$ справедлива формула $T(g_0)\tilde{A}_{\vec{k}}T(g_0^{-1})=\tilde{A}_{\vec{k}'}$, где $\vec{k}'=g_0\vec{k}$.

3. Пусть $\{\tilde{A}_{\vec{k}};\vec{k}\in R^3\}$ — генераторы конечномерного линейного представления $(T,SO(3,R),V)$ группы вращений. Докажите, что подпространство $M\subset V$ тогда и только тогда является инвариантным подпространством представления T, когда оно инвариантно относительно каждого из базисных генераторов $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$ и $\tilde{A}_3$.

4. Пусть $(T,SO(3,R),V)$ —конечномерное комплексное, вообще говоря, приводимое представление группы вращений. Докажите, что при его разложении на неприводимые встретятся представления только с теми спинами s, для которых существует совместное решение уравнений $H_+\vec{f}=0$, $H_3\vec{f}=s\vec{f}$, причем кратность представления спина s равна числу линейно независимых решений этих уравнений.

5. Докажите корректность определения и положительную определенность эрмитовой формы, определенной в тензорном произведении $V=V_1\bigotimes V_2$ унитарных пространств

$(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ и $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ формулой $\langle\ \vec{x}_1 \otimes \vec{y}_1, \vec{x}_2 \otimes \vec{y}_2\ \rangle_V = \langle\ \vec{x}_1, \vec{y}_1\ \rangle_1 \cdot \langle\ \vec{y}_1, \vec{y}_2\ \rangle_2$ для любых $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V_1$ и $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in V_2$.

6. Вычислить все коэффициенты Клебша-Гордана группы вращений в случае, когда одно из неприводимых представлений имеет спин $1/2$, т.е. для представления $T = T^{1/2} \otimes T^s$, $s = 0, 1/2, 1, \ldots$

7. Электрон находится в состоянии со спиновой поляризацией $\begin{pmatrix} i\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ и орбитальным моментом импульса l с круговой поляризацией. Определить вероятности всевозможных значений полного момента импульса и проекции полного момента импульса на определенное направление.

8. Проверить, что оператор Рунге-Ленца коммутирует с гамильтонианом кулоновой задачи.

9. Вычислить оператор Казимира правого регулярного представления группы вращений в параметризации Эйлера.

10. Докажите, что все гладкие линейно независимые решения дифференциального уравнения второго порядка, которому удовлетворяют обобщенные сферические функции, этими функциями исчерпываются.

11. Докажите, что левоинвариантная дифференциальная форма $\omega \in \Omega_{linv} G$ на группе Ли полностью определяется своим значением $\omega_e \in \Lambda T_e G$ в единице группы и возникающее отображение $\Omega_{linv} G \to \Lambda T_e G$ является изоморфизмом алгебр.

12. Вывести структурные уравнения Маурера-Картана на группе Ли явно в локальных координатах, отправляясь от структурных уравнений алгебры Ли левоинвариантных векторных полей.

13. Докажите, что тождество Якоби для структурных констант алгебры Ли является необходимым условием интегрируемости уравнений Маурера-Картана.

14. В параметризации Эйлера вычислить все левоинвариантные один-формы на группе вращений $SO(3, R)$.

15. Пусть $\beta_X \in g$ — однопараметрическая подгруппа в группе Ли g, для которой вектор $X \in g$ является касательным при $t = 0$. Докажите, что $\beta_{kX}(t) = \beta_X(kt)$ при любых $k, t \in R$.

16. Пусть g и h — алгебры Ли групп Ли G и H соответственно. Приведите пример, в котором гомоморфизм $\psi : g \to h$ не индуцирован никаким гомоморфизмом групп $\varphi : G \to H$.

17. Подстановкой матричных рядов докажите, что для любой матрицы $A \in Mat(n, K)$, удовлетворяющей условию $\| A \| < \ln 2$ справедливо тождество $\ln e^A = A$.

18. Покажите, что для матрицы $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ матрица $\ln e^{\Sigma}$ определена, но $\ln e^{\Sigma} \neq \Sigma$. Объясните результат.

19. а) Докажите, что если $f : U \to V$ — «локальный изоморфизм» окрестностей единиц U и V некоторых групп Ли, то $f(e) = e$.

б) Докажите, что алгебры Ли локально изоморфных групп Ли изоморфны.

20. Из формулы Кемпбелла – Хаусдорфа (без использования теоремы Дынкина) получить третий многочлен Дынкина $Z_3(X,Y)$.

21. Докажите, что две произвольные нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны.

22. Докажите, что в конечномерном линейном пространстве сильная сходимость эквивалентна покоординатной.

23. Докажите, что в линейном нормированном пространстве каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

24. Докажите, что в конечномерном линейном нормированном пространстве каждая фундаментальная последовательность сходится.

25. Докажите, что в полном линейном нормированном пространстве любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

26. Доказать, что формула $\| A \| = n \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$, $A = \| a_{ij} \| \in Mat(n, K)$ определяет мультипликативную норму в полной матричной алгебре n-го порядка.

27. Докажите сходимость экспоненциального и логарифмического матричных рядов.

28. Докажите, что для любых $X, Y \in g$ из алгебры Ли группы Ли G справедлива формула: $\exp tX \exp tY (\exp tX)^{-1} = \exp(tY + t^2[X,Y] + O(t^3))$.

29. Докажите, что множество правоинвариантных векторных полей на группе Ли G образует алгебру Ли относительно коммутатора, как линейное пространство естественно изоморфное T_eG. Докажите изоморфизм алгебр Ли правоинвариантных и левоинвариантных векторных полей на группе Ли.

30. Докажите, что на группе Ли каждое правоинвариантное векторное поле коммутирует с каждым левоинвариантным.

31. В параметризации Эйлера на группе вращений вычислить все правоинвариантные векторные поля. Найти их алгебру Ли и коммутаторы с левоинвариантными векторными полями прямым вычислением.

32. Определить генераторы левого гладкого действия группы Ли G на многообразии и доказать, что алгебра Ли этих генераторов гомоморфна алгебре Ли группы G.

33. Докажите, что матричные генераторы конечномерного линейного представления группы Ли G образуют алгебру Ли, гомоморфную алгебре Ли группы G.

34. Докажите, что действие связной группы Ли на произвольном многообразии однозначно восстанавливается по генераторам действия.

35. Докажите, что если $\{\tilde{A}_X, X \in g\}$ — матричные генераторы конечномерного линейного представления (T, G, V) группы Ли и $a = \beta_X(1) \equiv \exp X \in G$, то $T(a) = \exp \tilde{A}_X$.

36. Докажите, что дифференцируемое конечномерное линейное представление группы Ли тогда и только тогда унитарно, когда его матричные генераторы косоэрмитовы.

37. Пусть компактная группа Ли G гладко действует на хаусдорфовом многообразии M со второй аксиомой счетности. Докажите, что на M существует G-инвариантная метрика.

38. Докажите, что присоединенное представление группы $SO(3,R)$ эквивалентно фундаментальному.

39. Докажите, что в алгебре Ли компактной группы Ли существует базис, в котором структурные константы абсолютно кососимметричны.

40. Пусть $\Psi : G_1 \to G_2$ — гладкий сюръективный гомоморфизм групп Ли, $H = \mathrm{Ker}\,\Psi$ — его ядро и g_1, g_2, h — алгебры Ли групп G_1, G_2 и H — соответственно. Докажите, что алгебра Ли g_2 изоморфна фактор-алгебре g_1/h.

41. Докажите, что ядро $\mathrm{Ker}\,\psi$ любого гомоморфизма $\psi : g_1 \to g_2$ является идеалом в g_1, а образ $\mathrm{Im}\,\psi$ — подалгеброй в g_2. Докажите, что существует изоморфизм алгебр Ли $g_1/\mathrm{Ker}\,\psi \to \mathrm{Im}\,\psi$.

42. Пусть (g, φ, V_1) и (g, ψ, V_2) — два конечномерных линейных представления алгебры Ли g. Докажите, что формула $\pi(X)(\vec{x} \otimes \vec{y}) = \varphi(X)\vec{x} \otimes \vec{y} + \vec{x} \otimes \psi(X)\vec{y}$, $\forall X \in g, \vec{x} \in V_1, \vec{y} \in V_2$ корректно определяет некоторое представление $(g, \varphi \otimes \psi, V_1 \otimes V_2)$ алгебры g.

43. Пусть (g, φ, V) — линейное представление алгебры Ли g. Докажите, что формула $\varphi^*(X) : \alpha \to \varphi^*(X)\alpha$, $\forall X \in g, \alpha \in V^*$, где $\varphi^*(X)\alpha(\vec{x}) = -\alpha(\varphi(X)\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V$, корректно определяет представление (g, φ^*, V^*) алгебры g.

44. Пусть (g, φ, V) — конечномерное линейное представление алгебры Ли g. Как связаны матрицы представлений φ и φ^* в дуальных базисах?

45. Вычислите формы Киллинга алгебр Ли $u(p,q)$ и $su(p,q)$. Докажите, что алгебры Ли $su(p,q)$ полупростые, а алгебры Ли $u(p,q)$ не полупростые.

46. Докажите, что для любого дифференцирования D алгебры Ли g и любого

натурального k справедливо тождество $D^k[X,Y]=\sum_{m=0}^{k} C_k^m [D^m X, D^{k-m} Y]$ для любых $X, Y \in g$.

47. а) Докажите, что для полупростой алгебры Ли $[g,g]=g$. б) Докажите, что $[g,g]=g$ для (не полупростой!) алгебры Пуанкаре. в) Вычислите коммутаторную алгебру Ли алгебры Галилея.

48. а) Докажите, что всякая подгруппа разрешимой группы разрешима. б) Докажите, что фактор-группа любой разрешимой группы по разрешимому нормальному делителю разрешима. в) Докажите, что если H — замкнутый разрешимый нормальный делитель топологической группы G и факторгруппа G/H разрешима, то и группа G разрешима.

49. Докажите, что подгруппа группы $GL(n,K)$, состоящая из всех матриц с нулями ниже главной диагонали, разрешима.

Критерии оценивания: результаты каждой контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если студент предъявляет правильные письменные решения не менее трех из пяти задач, то есть для каждой задачи способен обосновать метод решения, понимает используемые термины и формулы и получил правильный ответ. При невыполнении указанных критериев оценки «зачтено» выставляется оценка «не зачтено».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в 7 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Билет содержит два теоретических вопроса, проверяющий компетенцию ОПК-2 в соответствии с индикатором достижения ИОПК 2.2 и одну задачу, при решении которых студент демонстрирует освоение компетенций ПК-1 в соответствии с индикаторами достижения ИПК 1.1. После ответа на билет студент отвечает на возможные уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня теоретических вопросов или открытого банка задач (п. 2), направленные на проверку достижения ИОПК 2.2 и ИПК 1.1.

Открытый перечень теоретических вопросов, выносимых на экзамен:

1. Определение и примеры алгебр Ли. Гомоморфизмы алгебр Ли.
2. Оператор Казимира и его свойства.
3. Построение алгебры Ли по группе Ли.
4. Соответствие между подгруппами, нормальными делителями и центром группы Ли с подалгебрами идеалами и центром алгебры Ли.
5. Теорема Вейля о представлениях полупростых алгебр Ли.
6. Схемы Дынкина. Классификация неразложимых систем корней. Классификация простых компактных алгебр Ли.
7. Упорядоченные линейные пространства. Системы простых корней.
8. Восстановление корневой системы по системе простых корней.
9. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение из алгебры Ли в группу Ли.
10. Определение и свойства абстрактной системы корней. Системы корней ранга 2.
11. Ряд Кампбэлла-Хаусдорфа-Дынкина.

12. Построение алгебры Ли по ее корневой системе.
13. Классические алгебры Ли. Подалгебра Картана и корневая система компактной алгебры Ли.
14. Полупростые и разрешимые алгебры Ли.
15. Компексификация и вещественная форма алгебры Ли.
16. Линейные представления алгебр Ли. Теорема Адо.
17. Компактные алгебры Ли и их связь с компактными группами Ли.
18. Структура представлений разрешимых алгебр Ли.
19. Форма Киллинга. Критерии Картана. Простые алгебры Ли.
20. Представления старшего веса.
21. Классификация представлений старшего веса алгебры sl(2,C).

Если по результатам текущего контроля студент имеет оценки за обе контрольные работы «зачтено», то он отвечает только на теоретические вопросы билета и дополнительные вопросы.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится при правильном ответе не менее чем на 90% вопросов билета и дополнительных вопросов. Оценка «хорошо» ставится при правильном ответе не менее чем на 75% вопросов билета и дополнительных вопросов. Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном ответе не менее чем на 60% вопросов билета и дополнительных вопросов. Оценка «неудовлетворительно» ставится при правильном ответе менее чем на 60% вопросов билета и дополнительных вопросов.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тесты (ИОПК-2.2, ИПК-1.1):

1. Алгебра Ли so(3) является:
   а) абелевой,
   б) разрешимой,
   в) простой,
   г) сложной.

Ключ: в).

2. К классическим алгебрам Ли относятся алгебры,
   а) встречающиеся в классической механике,
   б) сохраняющие билинейные и полуторалинейные формы,
   в) не имеющие идеалов.

Ключи: б).

3. Алгебра Ли su(2) является полупростой потому, что
   а) является неабелевой,
   б) ее первая производная совпадает с ней самой,
   в) не имеет разрешимых идеалов.

Ключи: в).

4. Какие из нижеследующих утверждений являются верными:
   а) каждой алгебре Ли отвечает одна, и только одна, группа Ли;
   б) любое конечномерное комплексное неприводимое представление разрешимой алгебры Ли одномерно;
   в) все алгебры Ли делятся на два класса - полупростые и разрешимые;
   г) метрика Киллинга простой алгебры Ли невырождена.

Ключи: б), г).

5. Множество всех полупростых алгебр Ли:

а) счетно,
б) несчетно,
в) конечно.
Ключи: а).

Теоретические вопросы (ИОПК-2.2, ИПК-1.1):

1.Сформулировать определение алгебры Ли.
2. Какую размерность имеет алгебра Ли группы вращений 3-х мерного пространства?
3. Дать определение подалгебры Ли и идеала.
4. Определение компактной алгебры Ли.
5. Критерии Картана разрешимой и полупростой алгебр Ли.
6. Привести пример классической алгебры Ли.
7. Привести пример не классической алгебры Ли.
8. Является ли алгебра Ли группы изометрий евклидовой плоскости разрешимой?
9. Привести пример разрешимой алгебры Ли.
10. Может ли простая алгебра Ли иметь нетривиальные одномерные представления?
11. Нарисовать схему Дынкина, отвечающую алгебре su(2).
12. Верно ли, что всякое конечномерное комплексное представление полупростой алгебры Ли обладает старшим весом?
13.Какую размерность имеет подалгебра Картана so(4)?
14. Перечислите все полупростые алгебры Ли ранга 2.
15. В чем состоит связь между идеалами вещественной алгебры Ли и ее комплексного расширения?

Информация о разработчиках

Шарапов Алексей Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры квантовой теории поля ФФ НИ ТГУ.