Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
Л. В.Гензе

Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы функционального анализа

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023, 2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А.Крылов

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск 2023

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

2. Задачи освоения дисциплины

–Освоить фундаментальные определения и теоремы теории линейных ограниченных и неограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Изучить основные факты теории базисов и фреймов.

– Научиться применять полученные знания для исследования свойств операторов и решения соответствующих уравнений.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Первый семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:
-лекции: 32 ч.
в том числе практическая подготовка: 0 ч.
Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Банаховы алгебры.

Определение, примеры. Регулярные, сингулярные элементы, топологические делители нуля. Спектр, спектральный радиус, теорема о полиномиальном отображении спектра. Коммутативные банаховы алгебры, преобразование Гельфанда. B*-алгебры, теорема Гельфанда-Наймарка.

Тема 2. Ограниченные операторы в гильбертовом пространстве.

Самосопряжённые, положительные, нормальные операторы, проекции. Их свойства. Функциональное исчисление самосопряжённых и нормальных операторов. Спектральная теорема для самосопряжённого оператора.

Тема 3. Неограниченные операторы.

Определение примеры и график неограниченного оператора. Замкнутые операторы. Симметричные и самосопряжённые операторы. Спектр неограниченного оператора. Преобразование Кэли.

Тема 4. Базисы и фреймы в гильбертовых пространствах.

Полные, минимальные, биортогональные системы. Определение и критерий базисности. Ортонормированные базисы и базисы Рисса. Бесселевы последовательности и фреймы. Примеры фреймов, разложение по фрейму.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, выполнения индивидуальных домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр. Выполнение индивидуальных заданий является обязательным и способствует формированию компетенций ПК 1. и ИОПК 1.1.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первые два вопроса носят теоретический характер. Ответы на них проверяют сформированность компетенций ОПК 1 и ПК 1. Третий вопрос предполагает решение задачи и интерпретацию полученных результатов. Решение задач проверяет компетенции ИПК 1.1 и ИОПК 1.1.

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопрос 1.

1. Банаховы алгебры. Основные свойства. Примеры.
2. Регулярные и сингулярные элементы.
3. Топологические делители нуля
4. Спектр и резольвента
5. Спектральный радиус
6. Гельфандовское отображение коммутативных алгебр.
7. B*-алгебры. Теорема Гельфанда-Наймарка
8. Нормальные и самосопряжённые операторы.
9. Проекторы и унитарные операторы
10. Функциональное исчисление самосопряжённых операторов со счётным спектром..
11. Неограниченные операторы. Теорема Тёплица. Примеры.
12. График линейного оператора. Замкнутые операторы.
13. Сопряжённые операторы. График сопряжённого оператора.
14. Симметричные и самосопряжённые операторы.
15. Критерий самосопряжённости оператора.
16. Спектр и резольвента неограниченного оператора.

Вопрос 2.

1. Полные системы. Критерий полноты.
2. Минимальные системы. Критерий минимальности.
3. Базисы. Критерий Гринблюма.
4. Теорема о базисности биортогональной системы в гильбертовом пространстве.
5. Базисы Рисса. Необходимые и достаточные условия.
6. Бесселевы системы.
7. Фреймы. Фреймовы операторы.
8. Разложение элемента по фрейму.
9. Теорема о границах фрейма.

Примеры задач:

1. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и $C\,[0,1]$ соответственно.

а) $f_n = (0,0,...0,\underset{n}{1},1,0,...)$;

в) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$f_1 = (1,0,0,.....)$; $f_n = (1,0,...0,\underset{n}{\frac{1}{n}},0,...), \quad n \geq 2$

3. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в c_0, где $f_n = \{0,...,0,\underset{n}{1},0,...\}$.

4. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и $C\,[0,1]$ соответственно?

а) $f_n = (0,0,...0,\underset{n}{1},-1,0,...)$;

в) $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$.

5. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$f_n = (\underbrace{1,1,...1}_{n},0,0,...)$

6. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в пространстве c

$f_n = \{0,...,0,\underset{n}{1},0,...\}$

7. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и $C\,[0,1]$ соответственно?

a) $f_1 = (1,0,0,.....)$; $f_n = (1,0,...,0,\underset{n}{1},0,...), \quad n \geq 2$;

b) $\{t^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$.

8. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$f_n = (1,-1,1,...\underset{n}{(-1)^{n-1}},0,..)$

9. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в пространстве ℓ_∞.Место для уравнения.

$$f_n = \{0,\dots,0,\underset{n}{1},0,\dots\}.$$

10. А-банахова алгебра. Для данного элемента x∈A проверить:

1. Является ли элемент x регулярным в A.
2. Является ли элемент x делителем нуля.
3. Является ли элемент x топологическим делителем нуля.
4. Найти норму || x ||, спектр σ(x) и спектральный радиус r(x).

.а). e^{-t^2}∈C[-1,1] в). T(x_1,x_2,x_3)=(T(x_2,x_3,0), T∈L($\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3$)

а). ln(t+1)∈C[0,1] в). T(x_1,x_2,x_3)= ($x_1,x_3,0$), T∈L($\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3$)

а). t^2-3t+2∈C[0,2] в). T(x_1,x_2,x_3)=($x_2,x_1,0$), T∈L($\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3$)

а). $\frac{1}{t+1}$∈C[0,2] в). T(x_1,x_2,x_3)=($x_1,0,x_2$), T∈L($\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3$)

а). $\frac{t+1}{t-1}$∈C[-1,0] в). T(x_1,x_2,x_3)=(0, x_1,x_3), T∈L($\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3$).

11. Является ли данное подпространство L⊂E

1. Замкнутым линейным подпространством
2. Гиперплоскостью
3. Идеалом
4. Максимальным идеалом.

1. а). L={ x∈C[0,1]: $\int tx(t)dt$=0 }
2. L={ x∈C[-1,1]: x(-1)=x(1) }
3. Множество чётных функций в пространстве C[-1,1]
4. Множество всех полиномов в пространстве C[0,1]
5. Множество всех непрерывно дифференцируемых функций в пространстве C[0,1]
6. L={ x∈C[0,1]: x(0)+x(1)=0 }
7. L={ x∈C[0,2]: x(0)+x(2)=2x(1) }

12. Проверить, является ли оператор T:$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

(a) Нормальным

(b) Унитарным

(c) Самосопряженным

(d) Положительным

Найти

$\|T\|$, $\sqrt{T}$, $|T|$, 2^T, T^4, 2^{-T}.

Найти спектральное разложение оператора T и описать пространства L_i, для которых $P_i:\mathbb{C}^n \to L_i$.

1. $T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

   $T(x_1, x_2) = (-2x_1 - x_2, -2x_2 - x_1)$.
2. $T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

   $T(x_1, x_2) = (\sqrt{2}x_2, \sqrt{2}x_1 + x_2)$.
3. $T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

   $T(x_1, x_2) = (5x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2)$
4. $T: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$

   $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_2, 2x_2 - 2x_3, -2x_2 + 2x_3)$
5. $T: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$

   $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_3, -x_2)$.

13.Для данного фрейма в пространстве $\mathbb{C}^n$:

(a) Найти фреймовый оператор S.

(b) Найти оператор, обратный S

(c) Найти фреймовы границы и элементы, на которых достигаются граничные значения.

(d) Разложить произвольный элемент $x \in \mathbb{C}^n$ по фрейму.

1) $f_1=(-1,0)$, $f_2=(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_3=(1,0)$

2) $f_1=(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_2=(1,0)$, $f_3=(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

3) $f_1=(0,1)$, $f_2=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $f_3=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $f_4=(0,-1)$

4) $f_1=(0,0,1)$, $f_2=(0,1,0)$, $f_3=(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $f_4=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

5) $f_1=(1,0,0)$, $f_2=(1,1,0)$, $f_3=(0,1,0)$, $f_4=(0,0,1)$

15 .Пусть $T: H \to H$ линейный оператор в гильбертов пространстве H, $D(T)-$ область определ

1. Является ли $D(T)$ плотным линейным подпространством в H.
2. Является ли оператор T неограниченным.
3. Существует ли обратный оператор T^{-1}.

4. Является ли оператор T замкнутым. Найдите замыкание T.

5. Является ли оператор T симметричным, самосопряжённым.

6. Найдите T^* и $D(T^*)$.

7. Найдите $\sigma(T)$.

1). $H = \mathcal{L}_2(0,\frac{\pi}{2})$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{\sin t}$, $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0,\frac{\pi}{2})$: $\frac{x(t)}{\sin t} \in \mathcal{L}_2(0,\frac{\pi}{2})\}$

2). $H=\mathcal{L}_2(0,1)$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{t^2}$ $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0,1)$: $\frac{x(t)}{t^2} \in \mathcal{L}_2(0,1)$Ъ}

3). $H=\mathcal{L}_2(0,\infty)$, $Tx(t) = tx(t)$, $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0,\infty)$: $x(t)e^t \in \mathcal{L}_2(0,\infty)\}$

4). $H=\mathcal{L}_2(0,\infty)$, $Tx(t) = e^t x(t)$, $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0,\infty)$: $\exists n \in \mathbb{N}$, такое что $x|_{[n,+\infty)} \equiv 0\}$

5). $H = \mathcal{L}_2(0,\frac{\pi}{2})$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{\sin t}$, $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0,\frac{\pi}{2})$: $\exists n \in \mathbb{N}$, такое что $x|_{(0,\frac{1}{n})} \equiv 0\}$.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится, если выполнены все индивидуальные задания и получены ответы на все три вопроса. Оценка «хорошо» ставится при выполнении всех индивидуальных заданий и ответа на два из трёх предложенных вопросов. Оценка «удовлетворительно» ставится за выполненные индивидуальные задания и ответ на один вопрос.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «IDo» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=6766

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) Учебно-методическое пособие по теме «Базисы и фреймы в гильбертовых пространствах».

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ.-М.: Мир, 1977. -360 с.
2. Садовничий В.А. Теория операторов. Издательство московского университета, 1986. - 368 с.
3. Кириллов А.А.,Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа.2-е изд. –М.: Наука, 1988. -400 с.
4. Сергеев А.Г. Лекции по функциональному анализу. М.: МИАН. 2013. 100 с
5. Порошкин А.Г. Лекции по функциональному анализу. Москва: Вузовская книга,
6. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.

б) дополнительная литература

1. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. -448 с
2. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу М.: МЦНМО, 2014.

3. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.
4. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу. Москва: МЦНМО, 2017 -334 с.

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:-
б) информационные справочные системы:
– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system
– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index
– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/
– ЭБС Консультант студента – http://www.studentlibrary.ru/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Хмылёва Татьяна Евгеньевна, кандидат физ.-мат наук, доцент кафедры теории функций, ТГУ, доцент.