

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Функциональный анализ

по направлению подготовки
03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
Фундаментальная и прикладная физика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
С.Н. Филимонов

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

- ОПК-2 – способность проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные;
- ПК-1 Способен проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-2.2 Анализирует и интерпретирует экспериментальные и теоретические данные, полученные в ходе научного исследования, обобщает полученные результаты, формулирует научно обоснованные выводы по результатам исследования;

ИПК-1.1 Собирает и анализирует научно-техническую информацию по теме исследования, обобщает научные данные в соответствии с задачами исследования.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля.

По дисциплине «Функциональный анализ» предусмотрено решение задач по темам лекций (ИПК 1.1, ИОПК 2.1).

Пример задачи: Доказать непрерывность сигма аддитивной функции.

Критерии оценивания: При правильном решении задачи ставится оценка зачтено, при неправильном решении не зачтено.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в 5 семестре проводится по экзаменационным билетам и состоит из четырех частей. За каждую часть выставляется оценка по пятибалльной шкале. Итоговая оценка есть среднее от оценок по частям.

Первая часть представляет собой контрольную работу с билетом из пяти задач по теме 1, проверяющие компетенции ПК 1, ОПК 2. в соответствии с индикаторами достижения компетенций ИПК 1.1, ИОПК 2.2.

Ответы даются в развернутой форме. Примерная задача:

1. Решить уравнение в K' $(x-1) f = 0$.

Вторая часть представляет собой теоретическую контрольную работу с билетом из двух вопросов по теме 2, проверяющие компетенции ПК 1, ОПК 2. в соответствии с индикаторами достижения компетенций ИПК 1.1, ИОПК 2.2.

Ответы даются в развернутой форме. Примерный билет:

1. Доказать теорему Кантора-Бернштейна.
2. Разбить множество целых чисел \mathbb{Z} на четыре класса эквивалентности (отношение эквивалентности \sim). Привести пример множества эквивалентного фактор множеству \mathbb{Z}/\sim .

Третья часть представляет собой теоретическую контрольную работу с билетом из трех вопросов по теме 3, проверяющие компетенции ПК 1, ОПК 2. в соответствии с индикаторами достижения компетенций ИПК 1.1, ИОПК 2.2.

Ответы даются в развернутой форме. Примерный билет:

1. Определение аддитивной и σ аддитивной функции. Свойства.
2. Непрерывность σ аддитивной функции (понятие и доказательства).
3. Продолжение меры по схеме Жордана. Пример множества, для которого эта мера не существует. Схема построения меры Лебега.

Четвертая часть является устным экзаменом с билетом из двух вопросов по теме 4 и дополнительными вопросами по всему курсу, проверяющие компетенции ПК 1, ОПК 2. в соответствии с индикаторами достижения компетенций ИПК 1.1, ИОПК 2.2.

Ответы даются в развернутой форме. Примерный билет:

1. Ступенчатая функция. Доказательство теоремы о последовательности ступенчатых функций.
2. Найти меру множества Кантора.

Примерные дополнительные вопросы:

Вопрос 1. Схема Жордана.

Вопрос 2. Формула Сохоцкого.

Открытый перечень теоретических вопросов, выносимых на экзамен.

Перечень вопросов по теме 2.

1. Доказать теорему Кантора-Бернштейна (без леммы).
2. Доказать, что множество всех подмножеств множества X имеет мощность большую чем X .
3. Доказать теорему Кантора (о сравнении мощностей X^X и Y^X).
4. Доказать теорему о порядковом типе множества W_α .
5. Доказать лемму о наложении множества A на подмножество B и следствия.
6. Доказать, что из двух вполне упорядоченных множеств одно подобно другому или одно подобно отрезку другого.
7. Доказать, что, если A содержит A_1 , которое содержит A_2 , и A эквивалентно A_2 , то A эквивалентно A_1 .
8. Теорема о минимальном кольце над классом множеств (доказать).
9. Определение и свойства кольца и полукольца (с примерами).
10. Теорема о минимальном кольце над полукольцом (доказать).
11. Множества на числовой прямой. Теорема о замыкании классов η на примере η_1 (доказать).

Перечень вопросов по теме 3.

- 1) Определение аддитивной и σ аддитивной функции. Свойства.
- 2) Непрерывность σ аддитивной функции (понятие и доказательства).
- 3) Мера, продолжение меры, продолжение меры с полукольца на минимальное над ним кольцо.
- 4) Теорема об единственности и продолжения меры в рамках минимального над полукольцом кольца (доказать).
- 5) Если мера на полукольце σ аддитивна, то и ее продолжение на минимальное кольцо тоже σ аддитивно (доказать теорему).
- 6) Классы $\sigma(M)$ и $\delta(M)$, их свойства.
- 7) Представления σ и δ множеств.
- 8) Продолжение σ -аддитивной меры на классы $\sigma(M)$ и $\delta(M)$.
- 9) Продолжение меры по схеме Жордана. Пример множества, для которого эта мера не существует.

Перечень вопросов по теме 4.

1. Ступенчатая функция. Доказательство теоремы о последовательности ступенчатых функций.
2. Определение сходимости "почти всюду" и сходимости по мере (доказательство теоремы, пример).
3. Интеграл Лебега от ступенчатой функции, лемма, свойства. Интеграл Лебега от измеримой функции (корректность определения).
4. Интеграл Лебега как функция множества (теоремы).

Критерии оценивания. За каждую часть выставляется оценка по пятибалльной шкале. Итоговая оценка есть среднее от оценок по частям.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задача (ИОПК 2.2.): Найти

$$\theta(a - |x|) * \theta(a - |x|)$$

Решение:

4. $\theta(a - |x|) * \theta(a - |x|)$

Если последовательно повторить вывод формулы $\theta(a - |x|)$ с аргументом $a - |x|$, то получим аналог формулы $\theta(a - |x|)$ с точностью до пределов интегрирования и вида неравенств в обеих частях формулы.

$$f_+ * g_+ = \begin{cases} \int_{-a}^{a-|x|} H dt, & 2a - |x| > 0 \\ 0, & 2a - |x| < 0 \end{cases}$$

Тогда: $\theta(a - |x|) * \theta(a - |x|) = \theta(2a - |x|) \theta(2a - |x|)$

Комм. поправил вывод и упустил знак равенства на последнем этапе

Теоретические вопросы (ИПК 1.1, ИОПК 2.2):

- 1 Теорема о минимальном кольце над классом множеств.
- 2 Определение и свойства кольца и полукольца (с примерами).
- 3 Ступенчатая функция. Теорема теоремы о последовательности ступенчатых функций.

Информация о разработчиках

Каратаева Инна Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ, доцент.