

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан ММФ ТГУ

Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы функционального анализа

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :

Математический анализ и моделирование (Mathematical Analysis and Modelling)

Форма обучения

Очная

Квалификация

Магистр

Год приема

2023, 2024

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

А.В. Старченко

Председатель УМК

Е.А. Тарасов

Томск – 2023

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

2. Задачи освоения дисциплины

Изучение классических основ теории меры и теории пространств Лебега и Соболева. Данная дисциплина посвящена в основном изучению теории пространств Соболева и ее приложений к задачам математической физике.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Первый семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Системы множеств.

Кольца, алгебры, σ -кольца и σ -алгебры множеств; существование σ -алгебры, порожденной классом множеств. Борелевская σ -алгебра.

Тема 2. Продолжение меры по Лебегу.

Внешняя мера Лебега. Измеримое множество. Мера Лебега.

Тема 3. Интеграл Лебега.

Измеримые функции и их свойства. Сходимость почти всюду и по мере. Определение и основные свойства интеграла Лебега. Определение пространств L_p .

Тема 4. Пространства Соболева.
Классические пространства Соболева. Теоремы вложения. Элементы геометрической теории меры.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, опроса по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и задачу. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Список теоретических вопросов

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ -алгебры.). Примеры.
2. Меры на полукольцах и на кольцах. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
3. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества.
4. Мера Лебега и корректность ее определения. Счётная аддитивность меры Лебега.
5. Теорема о структуре измеримых множеств.
6. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
7. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Теоремы Егорова и Лузина (без док-ва).
8. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
9. Определение интеграла Лебега в общем случае. Базовые свойства интеграла Лебега.
10. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва.
11. Теорема Лебега о предельном переходе.
12. Теорема Б. Леви о предельном переходе. Теорема Фату.
13. Прямые произведения мер.
14. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства L_p .
15. Понятие обобщенной функции. Примеры.
16. Определение пространства Соболева, основные свойства.
17. Аппроксимация гладкими функциями.
18. Теоремы вложения пространств W_p^k .

Примерный список задач.

1. Приведите пример компактного множества $X \subset \mathbb{R}$, граница которого имеет положительную меру Лебега.
2. Исследовать на измеримость функцию $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ на $[0, 1]$.
3. Показать, что при $p = kn > 1$ функции из класса Соболева W_p^k не обязаны быть ограниченными. Здесь n размерность арифметического пространства.

При ответе на вопросы теста оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал. Для выставления текущей успеваемости при контроле СРС рекомендуется использовать следующую таблицу.

Оценка результатов контроля СРС	Критерии соответствия
отлично	Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в тесте вопрос.
хорошо	Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано.
удовлетворительно	В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения.
неудовлетворительно	<p>Ответ представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения. Студент очень плохо владеет основными моделями и концепциями.</p> <p>Допущены существенные терминологические и фактические ошибки.</p> <p>Дан неправильный ответ, однозначно неправильное понимание вопроса на экзамене.</p>

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «IDo» - <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=6766>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине (<https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>).

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1981, 1989.
2. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998, 2002
3. Богачев В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва-Ижевск, РХД, 2009.
4. Ульянов П.Л. и др., Действительный анализ в задачах, М., Физматлит, 2005.
5. Мазья В.Г. Пространства Соболева. Ленинград, Ленинградский ун-т, 1985.

б) дополнительная литература:

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1979; СПб., Лань, 2008.
2. Богачев В.И., Основы теории меры, Т.1. Москва-Ижевск, РХД, 2003, 2006.
3. Гелбаум Б., Олмстед Дж., Контрпримеры в анализе. М., ЛКИ, 2007.
4. Халмош П., Теория меры. М., ИЛ, 1953. 5. Окстоби Дж., Мера и категория. М., ЛКИ, 2008.

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение: Специальное программное обеспечение не требуется.

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –
<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

15. Информация о разработчиках

Доцент ММФ ТГУ, к.ф.-м.н. Пчелинцев Валерий Анатольевич.