

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:  
Декан ММФ ТГУ  
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

**Комплексный анализ**

по направлению подготовки

**01.03.01 Математика**

**02.03.01 Математика и компьютерные науки**

**01.03.03 Механика и математическое моделирование**

Направленность (профиль) подготовки

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики**

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики  
и компьютерных наук**

**Основы научно-исследовательской деятельности в области механики  
и математического моделирования**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**

Год приема

**2023**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
Л.В.Гензе

Председатель УМК  
Е.А.Тарасов

## 1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

## 2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа

**Пример заданий на контрольной по теме «Открытая и замкнутая комплексные плоскости» (ИОПК 1.2)**

1. Для указанной функции найти действительную и мнимую части  $w = \bar{z} - iz^2$ ;
2. Записать комплексные числа в показательной форме:  $1+i$ ;
3. Вычислить:  $\operatorname{Ln}(-i)$ ;
4. Вычислить:  $3^{2+i}$ ;
5. Решить уравнение:  $\sin z = \pi i$ .

**Пример заданий на контрольной по теме «Теорема Коши». (ИОПК 1.2)**

1. Вычислить интеграл по дуге  $C$  от точки  $z_1$  до точки  $z_2$  (ответ дать в алгебраической форме).  $\int_{\tilde{N}} \bar{z} \operatorname{Re} z dz$ ,  $C: y = x^2; z_1 = 0; z_2 = -1+i$ .
2. Вычислить интеграл от аналитической функции (ответ дать в алгебраической форме).  $\int_1^{1+i} (3z^2 + z + 1) dz$ .

**Пример заданий на контрольной по теме «Голоморфность и конформность. Основные элементарные отображения». (ИОПК 1.2)**

Найти образ области  $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$  при отображении  $\frac{1}{2} \left( e^z + \frac{1}{e^z} \right)$

**Пример заданий на контрольной по теме «Теория вычетов». (ИОПК 1.2)**

Найти интеграл по контурам  $L_1, L_2, L_3$  используя интегральную формулу Коши, теорию вычетов.

1.  $\int_L \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)}$ , а)  $L_1: |z-i|=1$ , б)  $L_2: |z+1|=2$ , в)  $L_3: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

2. Вычислить интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x} dx$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполнено от 70% работы.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполнено от 50% до 70% работы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполнено менее 50% работы.

### 3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов и задачи. Экзамен проверяет индикаторы компетенции ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3 компетенции ОПК-1

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Множество комплексных чисел.
2. Топология открытой и замкнутой комплексной плоскости.
3. R-дифференцируемость. C-дифференцируемость и условия Коши-Римана.

Производная по направлению.

4. Голоморфность. Конформность. Связь с голоморфностью.
5. Интеграл от комплексного отображения по кривой.
6. Лемма Гурса.
7. Интегральная теорема Коши (обзор).
8. Интегральная формула Коши.
9. Интеграл Коши. Голоморфность интеграла Коши.
10. Свойства голоморфного отображения (обзор).
11. Теорема Вейерштрасса. Степенной ряд. Ряд Тейлора. Ряд Лорана.
12. Теорема Лорана. Теорема о единственности разложения в ряд Лорана.
13. Изолированные особые точки однозначного характера. Теорема Сохоцкого.
14. Теорема о связи между полюсом и нулем.
15. Теорема о разности между числом нулей и полюсов.
16. Вычет. Вычисление вычетов.
17. Теорема Коши о вычетах. Следствие из нее (о сумме всех вычетов).
18. Вычисление несобственного интеграла с помощью теории вычетов (обзор).
19. Принцип максимума.
20. Принцип единственности.
21. Принцип аргумента.
22. Принцип симметрии.
23. Аналитическое продолжение. Примеры.
24. Теорема Римана, лемма Шварца.
25. Теорема о локальной однолиственности. Граничное условие единственности.
26. Элементарные отображения.

## 27. Отображения на многоугольники (обзор).

Примеры задач:

1. Найти образ внутренности кругового многоугольника (его граница состоит из отрезков полярной сетки координат, т.е. из отрезков лучей и дуг окружностей) с вершинами в точках  $P_1 = \frac{3}{4}e^{i\pi/6}$ ,  $P_2 = \frac{3}{4}e^{i3\pi/4}$ ,  $P_3 = \frac{1}{2}e^{i3\pi/4}$ ,  $P_4 = \frac{1}{2}e^{i4\pi/3}$ ,  $P_5 = \frac{1}{3}e^{i4\pi/3}$ ,  $P_6 = \frac{1}{3}e^{i\pi/6}$  при отображении функцией Жуковского.

2. Разложить функцию  $f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}$  в ряд Лорана по степеням  $z$ .

3. Найти образ области  $D = \{z \in \mathbb{C}: 1 < \operatorname{Re} z < 4, 2 < \operatorname{Im} z < 3\}$  при отображении функцией  $w = z^2$ .

4. Вычислить интеграл от функции  $f(z) = \bar{z}$  по параболе  $y = x^2$  от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = 1 + i$ .

5. Найти образ области  $D = \{z \in \mathbb{C}: |z + 1| < \sqrt{2}, |z - 1| < \sqrt{2}\}$  при отображении  $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ .

6. Вычислить интеграл при помощи вычетов

$$\int_{\partial D} \frac{e^{\pi z} dz}{2z^2 - i}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \operatorname{Re} z < 0\}$$

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Итоги текущего контроля выражаются оценкой за работу в семестре и влияют на оценку за экзамен. Оценка за экзамен получается, как среднее арифметическое итоговой оценки текущего контроля и оценки за ответ на экзамене. Ответ на экзамене оценивается следующим образом. Студент получает «отлично», если он успешно, без ошибок отвечает по каждой части билета. «Хорошо» ставится в случае, если ответ верен не менее, чем на 75%, «удовлетворительно» - если ответ верен не менее, чем на 50%. Если студент показывает знание менее 50% билета, то ставится оценка «неудовлетворительно».

### 4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

*Оценочные материалы для проверки остаточных знаний могут быть использованы для формирования программы ГИА (программы государственного экзамена), а также экспертом Рособнадзора при проведении проверки диагностической работы по оценке уровня сформированности компетенций обучающихся (при контрольно-надзорной проверке). Вопросы данного раздела показывают вклад дисциплины в образовательный результат образовательной программы. Объем заданий в данном разделе зависит как от количества формируемых индикаторов достижения компетенций, так и от объема дисциплины по учебному плану.*

Тестовые вопросы для оценивания остаточных знаний (ИОПК 1.3, ИОПК 1.1):

1. Основные формы записи комплексного числа.
2. Записать в аналитическом виде окрестность конечной точки и окрестность бесконечности.
3. Геометрические свойства конформного отображения.
4. Примеры однолистных и не однолистных отображений.

5. Суть интегральной теоремы Коши.
6. Интегральная формула Коши.
7. Голоморфное отображение и особые точки.
8. Ряд Лорана ряд Тейлора.
9. Вычет, вычисление и применение вычетов.
10. Основные принципы.
11. Аналитическое продолжение на примерах.
12. Связь между голоморфным отображением и гармонической функцией.
13. Теорема Римана.
14. Основные элементарные отображения.

Задачи (ИОПК 1.2):

1. Найти действительную и мнимую части, модуль и аргумент комплексного числа  $z = \frac{1+3i}{-1+4i}$
2. Вычислить:  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$
3. Найти все значения корня  $\sqrt{2i}$
4. Изобразить множество точек плоскости, удовлетворяющих системе неравенств  $|z| < 1$  и  $|z+1| \leq 1$
5. Найти все изолированные особые точки функции  $f(z) = \frac{z+2}{z^2(z+i)}$
6. Вычислить интеграл при помощи вычетов:  $\int_{\gamma} \frac{2dz}{z^2(z+1)}$ , если  $\gamma: |z-i|=3$

### **Информация о разработчиках**

Садритдинова Гулнора Долимджановна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Колесников Иван Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Копанев Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ