Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Прикладная математика и инженерия цифровых проектов

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Д.Д. Даммер

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа;

– домашние задания.

Пример контрольной работы по темам «вычисление определителей» и «обратная матрица»:

Вариант1.

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}$.

3. Найти матрицу, обратную к матрице $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Сделать проверку.

Пример контрольной работы по векторной алгебре
Вариант 1.

1. Даны три вектора $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, удовлетворяющие условию

$$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}.$$

Зная, что $|\,\overline{a}\,|=3, |\,\overline{b}\,|=1, |\,\overline{c}\,|=4,$ вычислить

$$(\overline{a},\overline{b})+(\overline{b},\overline{c})+(\overline{c},\overline{a}).$$

2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a},\overline{b},$ чтобы векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ были коллинеарны.

Вариант 2.

1. Дано, что $|\,\overline{a}\,|=3, |\,\overline{b}\,|=5.$ Определить, при каком значении α векторы $\overline{a}+\alpha\overline{b}, \overline{a}-\alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

2. Векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ удовлетворяют условию

$$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}.$$

Доказать, что

$$[\overline{a},\overline{b}]=[\overline{b},\overline{c}]=[\overline{c},\overline{a}].$$

Вариант 3.

1.Доказать, что вектор $\overline{p}=\overline{b}(\overline{a},\overline{c})-\overline{c}(\overline{a},\overline{b})$ перпендикулярен к вектору $\overline{a}$.

2. Даны три точки *A(2,-1,2), B(1,2,-1), C(3,2,1)*. Найти координаты векторного произведения $[\overline{AB},\overline{BC}]$. Координаты заданы относительно декартовой системы координат.

Пример контрольной работы по теме «Канонические формы матрицы линейного оператора»
Вариант 1.

1. Привести к канонической форме Жордана матрицу

$$A_e=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Найти полярное разложение матрицы

$$A_e=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 2.

1. Привести к канонической форме Жордана матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Найти полярное разложение матрицы

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Пример контрольной работы по темам «Линейные пространства», «Евклидовы пространства»

1. Доказать, что все многочлены степени не выше n, у которых свободный член равен нулю, образуют линейное подпространство пространства многочленов степени не выше n. Найти его размерность и базис.

2. Используя процедуру ортогонализации, найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$ на подпространство L, натянутое на векторы

$$\overline{e}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \overline{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Пример контрольной работы по теме «Канонические формы матрицы оператора»

1. Линейный оператор A в некотором базисе имеет матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 5 \\ 6 & -9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Необходимо:

а) найти ранг, дефект, ядро и образ оператора A,

б) найти собственные векторы и собственные значения оператора A,

в) привести матрицу оператора A к нормальной жордановой форме.

8. Вариант контрольной работы по темам «Метод Лагранжа», «Метод Якоби», «Приведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе»

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:

$$\varphi(\overline{x}, \overline{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

2. Найти ортогональное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду и записать этот канонический вид

$$\varphi(\overline{x},\overline{x}) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3.$$

3. Привести данные квадратичные формы одновременно к каноническому виду, предварительно убедившись в возможности такого преобразования:

$$\varphi(\overline{x},\overline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3,$$
$$\psi(\overline{x},\overline{x}) = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «зачтено», «не зачтено».

Оценка «зачтено» выставляется, если все задачи решены верно; допускаются неточности, которые не повлияли на решение задач или были устранены в ходе решения/по замечанию преподавателя. Оценка «не зачтено» выставляется, если ответ отсутствует полностью; допущены ошибки при использовании выбранного метода решения задачи; ответ не получен или получен неверный.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит заданий контрольных работ, по которым у студента стоит отметка «не зачтено», в противном случае студенту ставится «зачтено». Продолжительность зачета 1 час.

Зачет во втором семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит заданий контрольных работ, по которым у студента стоит отметка «не зачтено», в противном случае студенту ставится «зачтено». Продолжительность зачета 1 час.

Экзамены в первом и втором семестре проводится в устной или письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов:

I семестр

МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Определение умножения матрицы на матрицу. Свойства умножения.

2.Определение определителя матрицы n-го порядка.

3. Определение члена определителя. Определение знака члена определителя путем подсчета инверсий.

4 Определение алгебраических дополнений. Формулы разложения определителя по столбцу и строке.

7.Понятие дополнительных миноров матрицы. Связь миноров с алгебраическими дополнениями. 8.Теорема Лапласа.

9.Понятие обратной матрицы. Необходимое и достаточное условие существования. Формула вычисления..

10. Понятие ранга матрицы. Основные свойства.

11. Теорема о базисном миноре. Второе определение ранга матрицы.

12 .Вычисление ранга матрицы сведением ее к канонической.

13.Понятие системы линейных уравнений. Матричная запись. Совместность и определенность.

14.Условие совместности системы (Теорема Кронекера-Капелли).

15. Формулы Крамера. Условие их применимости.

16. Понятие базисной системы. Главные и свободные неизвестные.
17.Метод Гаусса.
18.Однородные системы. Условие нетривиальной совместности.
19.Фундаментальная система решений. Связь числа фундаментальных решений с рангом системы.
20.Структура общего решения однородной и неоднородной систем.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.
1.Определение вектора. Длина вектора. Равенство векторов.
2.Сложение векторов. Свойства.
3.Умножение вектора на число. Свойства.
4.Понятие линейной зависимости векторов. Признаки линейной зависимости.
5.Понятие векторного пространства.
6. Понятие размерности векторного пространства.
6. Определение базиса и координат вектора (V1,V2,V3).
7.Условие коллинеарности векторов.
8.Аффинные и декартовы координаты точек на прямой, плоскости и в пространстве.
9.Ортогональная проекция вектора. Свойства.
10.Скалярное произведение и его свойства.
11.Векторное произведение и его свойства.
12.Смешанное произведение и его свойства.
13.Формулы преобразования базиса на плоскости и в пространстве.
14.Формулы преобразования системы координат на плоскости и в пространстве.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
1. Понятия об уравнении линии на плоскости.
2. Понятия об уравнении поверхности
3. Понятие об уравнениях линии в пространстве.
3. Понятие алгебраической линии и алгебраической поверхности.
4. Параметрические уравнения линий
5. Параметрические уравнения поверхностей.
6. Общее уравнение прямой на плоскости.
7. Уравнение прямой на плоскости в отрезках.
8. Нормальное уравнение прямой на плоскости.
9. Определение расстояния от точки до прямой на плоскости.
10. Общее уравнение плоскости.
11. Нормальное уравнение плоскости.
12. Определение расстояния от точки до плоскости.
13. Параметрические уравнения прямой.
14. Канонические уравнения прямой.
15. Каноническое уравнение эллипса. Смысл параметров уравнения.
16. Каноническое уравнение гиперболы. Смысл параметров уравнения.
17. Каноническое уравнение параболы. Смысл параметров уравнения.
18. Каноническое уравнение эллипсоида. Смысл параметров уравнения.
19. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида. Смысл параметров уравнения.
20. Каноническое уравнение двуполосного гиперболоида. Смысл параметров уравнения.
21. Каноническое уравнение эллиптического параболоида. Смысл параметров уравнения.
22. Каноническое уравнение гиперболического параболоида. Смысл параметров уравнения.

II семестр

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

1. Определение отображения.
2. Определение алгебраической операции.
3. Определение обратной операции.
4. Определение группы.
5. Определение кольца.
6. Определение поля.
7. Определение изоморфных групп.

ЛИНЕЙНЫЕ, АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

1.Определение линейного пространства.

2. Понятие линейной зависимости.

3. Понятие размерности пространства.

4. Понятия базиса пространства и координат вектора.

5 Понятие линейного подпространства.

6. Понятие линейной оболочки.

7. Задание линейных подпространств системами линейных уравнений.

4. Понятия пересечения и суммы линейных подпространств. Теоремы о размерности пересечения и суммы.

5. Определение точечно-векторного аффинного пространство.

6. Система координат в пространстве .

7. Плоскость в .

8. Прямая плоскость в .

6. Определение евклидова пространства. Скалярное произведение.

7. Длина вектора.

8.Ортогональность. Ортонормированный базис.

9. Проектирование вектора на подпространство.

7. Понятие унитарного пространства. Свойства унитарного пространства.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

1.Понятие линейного оператора.

2. Понятия ранга и дефекта линейного оператора.

3.Построение матрицы линейного оператора.

4. Преобразование матрицы оператора при изменении базиса.

5.Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

6. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен.

4. Разложение матрицы оператора простой структуры.

5. Определение инвариантного подпространства.

6. Треугольная форма матрицы оператора.

7. Понятие нильпотентного оператора. Каноническая форма матрицы нильпотентного оператора.

8. Нормальная жорданова форма, Приведение матрицы оператора к нормальной жордановой форме.

9. Сопряженный оператор.

10. Нормальные операторы. Матрица нормального оператора.

11. Унитарные операторы. Матрица унитарного оператора.

12. Самосопряженный оператор. Приведение матрицы самосопряженного оператора.

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

1.Определение билинейной формы. Построение матрицы билинейной формы.

2. Определение квадратичной формы. Построение матрицы квадратичной формы.

3. Канонический вид квадратичной формы.

4.Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

5.Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду.

6.Приведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе.

7. Одновременное приведение к каноническому виду двух квадратичных форм.

8. Приведение к каноническому виду уравнение гиперповерхности второго порядка.

9. Закон инерции квадратичных форм.

10. Определение матрицы Грама. Свойства матрицы Грама.

11. Критерий Сильвестра.

Примеры задач:

I семестр

1. Решить систему по правилу Крамера

$$\begin{aligned} &2x+3y-z=0,\\ &x+2y+3z=1,\\ &x+3y \qquad =-1. \end{aligned}$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

3. Найти проекцию точки $A(4,-3,1)$ на плоскость $5x+3y-z-3=0$.

4. Составить уравнения проекции прямой

$$\begin{cases} x-4y+2z-5=0, \\ 3x+y-z+2=0 \end{cases}$$

на плоскость $2x+3y-z+2=0$.

II семестр

1. Линейное подпространство L задано уравнениями

$$\begin{aligned} &3x_1+6x_2+10x_3+4x_4-2x_5=0,\\ &6x_1+10x_2+17x_3+7x_4-3x_5=0,\\ &9x_1+3x_3+2x_4+3x_5=0,\\ &12x_1-2x_2+x_3+8x_4+5x_5=0. \end{aligned}$$

Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение $L^{\perp}$.

2. Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис подпространства, натянутого на заданную систему векторов

$$\overline{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \overline{x}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \overline{x}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \overline{x}_4=\begin{bmatrix}-3\\3\\4\\5\end{bmatrix}.$$

3. Найти ранг, дефект, ядро и образ операторов, заданного следующей матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Найти квадратный корень для матрицы

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Результаты экзаменов определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

оценка «отлично», если студент уверенно владеет теоретическим материалом, относящимся к линейной алгебре и аналитической геометрии, уверенно использует его при решении задач линейной алгебры и аналитической геометрии;

оценка «хорошо», если студент хорошо владеет теоретическим материалом, относящимся к линейной алгебре и аналитической геометрии, хорошо использует его при решении задач линейной алгебры и аналитической геометрии;

оценка «удовлетворительно», если студент недостаточно хорошо владеет теоретическим материалом, относящимся к линейной алгебре и аналитической геометрии, недостаточно хорошо использует его при решении задач линейной алгебры и аналитической геометрии;

оценка «неудовлетворительно», если студент не владеет теоретическим материалом, относящимся к линейной алгебре и аналитической геометрии, неуверенно использует его при решении задач линейной алгебры и аналитической геометрии.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

1. Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ заданы своими координатами относительно декартова базиса. Вычислить скалярное произведение векторов:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матрицу, обратную к матрице A. Сделать проверку:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Найти собственные значения линейного оператора A, заданного в некотором базисе матрицей

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ к заданию
1	0
2	$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$

Критерий оценивания остаточных знаний	Оценка
Решены три задачи	отлично
Решены три задачи, но с некоторыми погрешностями	хорошо
Решены любые две задачи	удовлетворительно
Решено меньше двух задач	неудовлетворительно

Информация о разработчиках

Лившиц Климентий Исаакович, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.