

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Основы тензорного анализа

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
и компьютерных наук

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- упражнения;
- контрольная работа;

Упражнения (ИОПК-1.2.) (примеры)

Задача 1. Упростить $\delta_{\alpha}^i a_i^{\beta} \delta_{\beta}^{\alpha}$

Задача 2. Дано $a_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{x} = (1, 2, 5)$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Определить $a_i^j x_j$, $a_i^j y^i$.

Задача 3. Чему равно $\delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\beta}^{\gamma} \delta_{\gamma}^{\alpha}$, если $n = 3$? А если $n = 4$?

Ответы:

1. a_i^i

2. $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$, $(9, 7, 6)$

3. 3 и 4.

Критерии оценивания: упражнение выполнено успешно, если приведено полное решение с верным ответом.

Контрольная работа (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3)

Контрольная работа состоит из 2 теоретических вопросов и 2 задач.

Примеры теоретических вопросов:

1. Преобразование координат тензора.
2. Тензор как геометрический объект.
3. Инварианты.

4. Линейные операции над тензорами.
5. Линейное пространство тензоров данной валентности.
6. Произведение тензоров.
7. Базис пространства тензоров.

Примеры задач:

Задача 1

Доказать, что $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, где $\varphi(\bar{x})$ функция на V , образует тензор валентности $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2

Найти $t_{(ijk)} - t_{[ijk]}$

Ответы:

Задача 1. **Решение:**

$$\varphi_{i'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \quad x^i = A_{j'}^i x^{j'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = A_{j'}^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i'}} = A_{j'}^i \delta_{i'}^{j'} = A_{i'}^i, \quad \varphi_{i'} = A_{i'}^i \varphi_i.$$

Задача 2. $\frac{1}{3}(t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij})$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все теоретические вопросы и все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если допущена одна неточность в ответе на теоретический вопрос либо одна погрешность (поправимая) в решении задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется при наличии двух существенных ошибок при ответе на четыре пункта контрольной работы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется при наличии двух или более существенных ошибок при ответе на четыре пункта контрольной работы.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Билет для зачёта состоит из двух частей.

Первая часть представляет собой 2 вопроса, проверяющих ИОПК 1.1 и ИОПК-1.3. Ответы на вопросы первой части оформляются студентом письменно в развёрнутой форме.

Третья часть содержит 2 вопроса, проверяющих ИОПК 1.2 и оформленные в виде практических задач. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Перечень теоретических вопросов:

1. Линейное пространство.
2. Преобразование базиса. Преобразование координат.
3. Линейные 1-формы (ковекторы).
4. Сопряжённое пространство.
5. Дуальный базис. Преобразования.
6. Свёртка вектора и ковектора.
7. Интерпретация ненулевого ковектора в аффинном пространстве.

8. Интерпретация нулевого ковектора в аффинном пространстве.
9. Полилинейные отображения.
10. Тензор типа $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.
11. Координаты тензора относительно базиса линейного пространства.
12. Преобразование координат тензора.
13. Тензор как геометрический объект.
14. Инварианты.
15. Линейные операции над тензорами.
16. Линейное пространство тензоров данной валентности.
17. Произведение тензоров.
18. Базис пространства тензоров.
19. Свёртывание тензоров.
20. Обратный тензорный признак.
21. Тензорное произведение линейных пространств.
22. Симметричные и кососимметричные тензоры.
23. Симметрирование и альтернирование тензоров.
24. Внешняя степень линейного пространства.
25. Внешняя алгебра.
26. Тензоры над линейным пространством с (псевдо)евклидовой метрикой.
27. Дифференцируемое многообразие.
28. Касательное и кокасательное расслоения.
29. Тензорные поля на многообразии.
30. Формы Пфаффа. Исчисление внешних форм.
31. Аффинная связность.
32. Структурные уравнения Картана.
33. Тензоры кручения и кривизны.
34. Параллелизм.
35. Ковариантное дифференцирование тензорных полей.
36. Геодезические.
37. Риманово многообразие.
38. Риманова связность.
39. Тензор кривизны риманова многообразия.

Примеры задач:

Задача 1. Упростить $a_i^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\epsilon b_\epsilon c_\gamma$

Задача 2. Дано $a_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $x_i = (1, 2, 5)$, $y^i = (0, 3, 1)$. Определить

$$a_i^j x_j, a_i^j y^i, a_i^i, \left(a_i^j - \frac{1}{2} a_k^k \delta_i^j \right) x_j y^i.$$

Задача 3. Чему равно $\delta_\alpha^\beta \delta_\beta^\gamma \delta_\gamma^\alpha$, если $n = 3$? А если $n = 4$?

Задача 4. Доказать, что $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, где $\varphi(\bar{x})$ функция на V , образует тензор валент-

ности $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Задача 5. Определить $\omega \otimes \varphi = \varepsilon$, где $\omega = (1, 2, 3)$, $\varphi = (0, 1, 2) \in V^*$.

Задача 6. Доказать, что если a_{ij} – кососимметричен, то $a_{ij}x^i x^j = 0$.

Задача 7. Определить $\Omega \wedge \omega$, где $\Omega = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$, $\omega = \mathbf{e}^1$.

Задача 8. Написать формулу для (\bar{x}, \bar{y}) , если $g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Определить $[Y, Z]$, где $Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}$, $Z = 2x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$.

Критерии оценивания:

Результаты зачёта определяются оценками «зачтено», «незачтено».

Оценка «зачтено» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста, на теоретический вопрос дан развернутый ответ и все задачи решены без ошибок, либо если в ответах на теоретические вопросы и в решениях задач присутствуют погрешности, легко устранимые при совместном обсуждении.

Оценка «незачтено» выставляется, если отклонения в ответах студента от верных результатов требуют значительных усилий при совместном обсуждении, либо если студент неспособен составить ответ, сколько-нибудь адекватный поставленным вопросам и задачам.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест

- Какие преимущественные области применения тензорного анализа?
 - Линейная алгебра.
 - Вариационное исчисление.
 - Теоретическая физика.
 - Аналитическая геометрия.
 - Дифференциальная геометрия.
 - Теоретическая механика.
- Какое утверждение ближе всего к истине из следующих:
 - Внешнюю алгебру можно построить как составную часть тензорного исчисления.
 - Тензорное исчисление можно построить как составную часть внешней алгебры.
 - Между упомянутыми теориями нет естественной связи.

Ключи: 1 (в+д+е), 2 (а).

Задачи

Задача 1

Доказать, что скалярное произведение (\bar{x}, \bar{y}) – билинейная форма.

Задача 2

Доказать, что смешанное произведение $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ – трилинейная форма.

Решения:

Задача 1. Это следует из свойств скалярного произведения

Задача 2. Это следует из свойств смешанного произведения.

Теоретические вопросы:

1. Линейное пространство.
2. Сопряжённое пространство.
3. Дуальный базис. Преобразования.
4. Свёртка вектора и ковектора.
5. Тензор типа $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.
6. Координаты тензора относительно базиса линейного пространства.
7. Преобразование координат тензора.
8. Тензор как геометрический объект.
9. Инварианты.
10. Линейные операции над тензорами.
11. Линейное пространство тензоров данной валентности.
12. Произведение тензоров.
13. Симметричные и кососимметричные тензоры.
14. Симметрирование и альтернирование тензоров.
15. Внешняя степень линейного пространства.

Информация о разработчиках

Бухтяк Михаил Степанович, к.ф.-м.н., доцент кафедры геометрии.