

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан

Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

**Методы оптимизации**

по направлению подготовки

**01.04.01 Математика**

Направленность (профиль) подготовки :

**Фундаментальная математика**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Магистр**

Год приема

**2023, 2024**

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

П.А. Крылов

Председатель УМК

Е.А. Тарасов

Томск – 2023

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

## **2. Задачи освоения дисциплины**

- Освоить аналитический аппарат методов оптимального управления: корректно определять множество допустимых стратегий; корректно вычислять целевые функционалы; корректно записать и анализировать уравнения Беллмана и уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана.

- Освоить современный аппарат и приобрести практические навыки стохастического оптимального управления для задач оптимизации портфелей на финансовых рынках.

- Научиться применять понятийный аппарат и современные методы динамического программирования для решения практических оптимизационных задач.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Второй семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ, функциональный анализ, топология, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика, уравнения в частных производных, теория случайных процессов.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:

- лекции: 32 ч.

- практические занятия: 32 ч.

- групповые консультации: 1,5 ч.

- промежуточная аттестация: 4 ч.

- самостоятельная работа обучающегося: 121,8 ч.

- экзамен: 24,7 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

### **Тема 1. Оптимальное потребление в дискретном времени.**

Постановка задачи оптимального потребления. Динамика капитала. Множество допустимых стратегий. Классификация функций полезности. Проблема оптимизации. Принцип Беллмана. Построение оптимальных стратегий потребления для разных типов функций полезности и наследственности.

### **Тема 2. Оптимальное потребление и инвестирование в дискретном времени.**

Определение финансовых рынков с рисковыми активами. Постановка задачи оптимального потребления и инвестирования. Вывод динамики капитала. Множество допустимых стратегий. Целевая функция. Анализ оптимальных стратегий потребления и инвестирования. Меры риска для оптимальных стратегий.

### **Тема 3. Оптимальное потребление в непрерывном времени.**

Постановка задачи оптимального потребления в непрерывном времени. Динамика капитала. Множество допустимых стратегий. Целевая функция. Функция Гамильтона. Уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана. Проверочная теорема. Построение оптимальных стратегий потребления для степенных, логарифмических и экспоненциальных функций полезности и наследственности.

## **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения двух контрольных работ, тестов по лекционному материалу и фиксируется в форме контрольной точки один раз в семестр.

## **10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

Экзамен в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 2 часа. Первая часть состоит из двух вопросов проверяющих ИОПК 1.1. Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИПК 1.1. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач.

### **Примерный перечень теоретических вопросов**

1. Дать определение задачи оптимального потребления. Сформулировать принцип детерминированного динамического программирования в дискретном времени.
2. Дать определение целевой функции для задачи оптимального потребления в дискретном времени и множества допустимых стратегий.
3. Объяснить рекуррентный метод вычисления оптимальных стратегий потребления.
4. Дать определение задачи оптимального потребления и инвестирования в дискретном времени.
5. Дать определение целевой функции для задачи оптимального потребления и инвестирования в дискретном времени и множества допустимых стратегий.

6. Сформулировать принцип стохастического программирования в дискретном времени.
7. Дать определение задачи оптимального потребления в непрерывном времени.
8. Дать определение целевой функции для задачи оптимального потребления в непрерывном времени.
9. Определить класс допустимых стратегий для задачи оптимального потребления в непрерывном времени.
10. Дать определение функции Гамильтона.
11. Методы вычисления гамильтонианов для разных типов интегральных целевых функционалов.
12. Записать уравнение Беллмана для задачи оптимального потребления в непрерывном времени.
13. Сформулировать проверочную теорему для задач оптимального управления в непрерывном времени.

Примеры задач:

1. Найти оптимальные потребления для  $U(x) = 4x^{1/4}$ ,  $h(x) = 2x^{1/2}$ ,  $N = 1$  и начального капитала  $x > 0$ .
  2. Найти оптимальные потребления для  $U(x) = 0$ ,  $h(x) = x^{1/2}$ ,  $N \geq 3$  и начального капитала  $x > 0$ .
  3. Найти оптимальные потребления для  $U(x) = \ln x$ ,  $h(x) = 0$ ,  $N \geq 3$  и начального капитала  $x > 0$ .
4. Рассмотрим задачу оптимального потребления и инвестирования для
- $$N \geq 3, U(x) = 4x^{1/4}, h(x) = 8x^{1/4} \text{ и начального капитала } x > 0.$$
- (a) Построить оптимальные стратегии потребления и инвестирования в этом случае.
  - (b) Подсчитать среднее и дисперсию для терминального капитала оптимальной стратегии.
5. Рассмотрим задачу оптимального потребления и инвестирования для
- $$N = 1, U(x) = 4 \ln x^2, h(x) = 2x^{1/2} + 2 \text{ и начального капитала } x > 0.$$
1. (a) Построить оптимальные стратегии потребления и инвестирования в этом случае.

2. (b) Подсчитать среднее и дисперсию для терминального капитала оптимальной стратегии.

Результаты экзамена определяются по двадцатибалльной шкале. Перевод в пятибалльную по следующему правилу :

0 - 9,99 баллов - «неудовлетворительно»

10 – 12,99 баллов - «удовлетворительно»

13 – 16,99 баллов - «хорошо»

17 – 20 баллов - «отлично»

#### Критерии оценивания контрольных работ

| <b>Неудовлетворительно<br/>(0-9,99 баллов)</b>     | <b>Удовлетворительно<br/>(10 — 12,99 баллов)</b> | <b>Хорошо<br/>(13 — 16,99 баллов)</b> | <b>Отлично<br/>(17 — 20 баллов)</b> |
|--|--|---------------------------------------|-------------------------------------|
| Работа не сдана или решено верно менее 25% заданий | Решено верно от 25% до 50% заданий               | Решено верно от 21% до 80% заданий    | Решено верно более 80% заданий      |

Контрольная работа и экзамен максимально может быть оценен 20 баллами.

Итоговая оценка – среднее арифметическое из оценок за контрольные работы и экзамен. При ответе на теоретический вопрос оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал, знания основной и дополнительной литературы.

#### Критерии оценивания теоретических вопросов экзамена

| <b>Неудовлетворительно<br/>(0-9,99 баллов)</b>                  | <b>Удовлетворительно<br/>(10 — 12,99 баллов)</b>  | <b>Хорошо<br/>(13 — 16,99 баллов)</b>  | <b>Отлично<br/>(17 — 20 баллов)</b>  |
|---|---|--|--|
| Дан неправильный ответ, однозначно неправильная трактовка темы. | В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения. Знание минимума литературы. | Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано. Знание основной литературы. | Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в билете вопрос. Знание основной и дополнительной литературы. |

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «ИДо» - <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=1274>

б) Емельянова Т.В., Исаева Н.А., Кривякова Э.Н. Случайные величины. Методические указания. Часть 3. Томск, ТГУ, 2005.

в) Исаева Н.А., Кривякова Э.Н. Случайные величины. Последовательности случайных величин. Методические указания. Часть 2. Томск, ТГУ, 1989.

г) Коршунов Д.А., Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей, СПб, Лань, 2004.

д) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

е) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Pergamenschikov, S.M. and Pchelintsev, E.A. Stochastic modelling for the financial markets. Part 2. Dynamical Programming. Tomsk State University Publish Edition, 2019, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02365167>
2. Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах, М.: Ленанд, 2015, 369 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей, М.: Кнорус, 2014, 492 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2001, 318 с.
5. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. Санкт-Петербург: Лань, 2016, 317 с.
6. Жакод, Ж. И Ширяев, А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Том 1, М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 1994, 544 с.
7. Липцер, Р.Ш. и Ширяев, А.Н. *Статистика случайных процессов*. М.: Наука, 1974,
8. Липцер, Р.Ш. и Ширяев, А.Н. *Теория Мартингалов*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1986, 512 с.
9. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: КДУ, 2009, 326 с.
10. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2004, 271 с.
11. Ширяев А.Н. Вероятность - 1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. М.: Изд-во МЦНМО, 2011, 551 с.

12. Ширяев А.Н. Вероятность - 2. Суммы и последовательности случайных величин - стационарные, мартингалы, марковские цепи. М.: Изд-во МЦНМО, 2011, 553-967 с.

б) дополнительная литература:

1. Бернштейн С.Н. Теория вероятностей. М-Л., 1946.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения, М.: Кнорус, 2013, 478 с.
4. Козлов М.В. Элементы теории вероятностей в задачах и примерах. М., изд-во МГУ, 1991.
5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1998.
6. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М., 1983.
7. Прохоров Ю.В., Пономаренко Л.С. Лекции по теории вероятностей и математической статистике, Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 2012, 252 с.
8. Прохоров А.В., Ушаков А.Ф., Ушаков В.А. Задачи по теории вероятностей. М., Наука, 1989.

в) ресурсы сети Интернет:

- [https://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=tvp&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=tvp&option_lang=rus)
- <http://journals.tsu.ru/mathematics/>
- <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02365156>

### **13. Перечень информационных технологий**

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
- ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
- ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

### **15. Информация о разработчиках**

Пергаменщиков Сергей Маркович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа и теории функций, профессор

Пчелинцев Евгений Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа и теории функций, доцент