

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Численные методы

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математические методы в цифровой экономике

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.

ОПК-4. Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.

ИОПК-2.2. Проявляет навыки использования основных языков программирования, основных методов разработки программ, стандартов оформления программной документации.

ИОПК-2.3. Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи.

ИОПК-2.4. Демонстрирует умение адаптировать существующие математические методы для решения конкретной прикладной задачи.

ИОПК-4.2. Применяет знания, полученные в области информационных технологий, при решении задач профессиональной деятельности.

ИОПК-4.4. Демонстрирует умение составлять научные обзоры, рефераты и библиографии по тематике научных исследований.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- лабораторные работы.

Контрольная работа выполняется письменно по билетам, в каждом из которых по два теоретических вопроса. Результаты контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если даны правильные ответы на оба вопроса и на дополнительные вопросы. В противном случае выставляется оценка «не зачтено».

Перечень лабораторных работ.

5 семестр.

Лабораторная работа 1. Основы теории погрешностей

Определить:

- число верных знаков приближенного числа, если известна абсолютная погрешность;
- абсолютную и относительную погрешность, если известно число верных знаков;

- абсолютную погрешность z функции Δz , если известны абсолютные погрешности аргументов. Значение функции z записать с верными знаками.

Лабораторная работа 2. Найти приближенное значение функции в точке x по таблице значений x_i, y_i , используя многочлен Лагранжа. Построить графики многочлена Лагранжа с табличными значениями и график вычислительной погрешности. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, оценить неустранимую погрешность результата.

Лабораторная работа 3. Найти приближенное значение функции в точке x по схеме Эйткена. Оценить неустранимую погрешность результата.

Лабораторная работа 4. Найти приближенное значение функции в точке x по таблице значений x_i, y_i , используя многочлен Ньютона. Построить графики многочлена Ньютона с табличными значениями и график вычислительной погрешности. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, оценить неустранимую погрешность результата.

Лабораторная работа 5. По заданным значениям x_i, y_i построить линейный сплайн и представить его на графике.

Лабораторная работа 6. По заданным значениям x_i, y_i построить параболический сплайн и представить его на графике.

Лабораторная работа 7. По заданным значениям x_i, y_i построить кубический сплайн и представить его на графике.

На одном графике представить все три сплайна и заданные значения. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

Лабораторная работа 8. Аппроксимировать заданные значения x_i, y_i методом наименьших квадратов используя алгебраический многочлен третьей степени, вывести матрицу Грама, построить графики аппроксимирующего многочлена и исходных данных.

Лабораторная работа 9. Аппроксимировать заданные значения x_i, y_i методом наименьших квадратов используя многочлен третьей степени с использованием ортогональных полиномов Чебышева дискретной переменной, вывести матрицу Грама, построить графики аппроксимирующего многочлена и исходных данных.

Лабораторная работа 10. Построить таблицу конечных разностей для функции, заданной в виде таблицы x_i, y_i на равномерной сетке. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, определить наивысший порядок правильных конечных разностей.

Лабораторная работа 11. Выбрать интерполяционные формулы и с помощью этих формул найти приближенное значение интерполируемой функции в точках x . Обосновать выбор интерполяционных формул. При построении интерполяционной формулы использовать только правильные конечные разности, но не выше четвертого порядка.

Лабораторная работа 12. Используя результаты лабораторных работ 10,11 вычислить 1 и 2 производные в точке x . Считая, что заданные значения известны с верными знаками, вычислить следующие погрешности: вычислительную, метода и полную.

Лабораторная работа 13. Вычисление интегралов методами Ньютона-Котеса

Вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$ по формулам:

- 1) левых прямоугольников;
- 2) средних прямоугольников;
- 3) правых прямоугольников;
- 4) трапеций;
- 5) Симпсона;
- 6) “трех восьмых”.

Процесс вычисления интеграла организовать при использовании метода Рунге без пересчета значений подынтегральной функции в узлах.

Вывести значение интеграла и количество узлов, которое потребовалось для вычисления значения интеграла с заданной точностью.

Лабораторная работа 14. Вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$ по формуле Гаусса. Вывести значение интеграла и число узлов, которое потребовалось для вычисления интеграла с заданной точностью.

Лабораторная работа 15. Вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$ по формуле Чебышева. Вывести значение интеграла и число узлов, которое потребовалось для вычисления интеграла с заданной точностью.

Варианты исходных данных для выполнения лабораторных работ приведены в:

Смагин В.И., Решетникова Г.Н. Численные методы (аппроксимация, дифференцирование и интегрирование): Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет, 2008. – 184 с.

6 семестр.

Лабораторная работа 1. Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них с точностью до $\varepsilon = 0.00005$

1. Методом простой итерации
2. Методом Ньютона
3. С применением модификаций методов Ньютона и простой итерации (секущих и Стеффенсена).

Оценить скорость сходимости методов по количеству итераций, необходимых для достижения требуемой точности.

Примеры вариантов заданий:

1) $\ln x + (x+1)^3 = 0$ 2) $x2^x = 1$

Лабораторная работа 2. Найти решение системы нелинейных уравнений графически и уточнить их:

а) методом простой итерации с точностью до 0.00005.

б) методом Ньютона с точностью до 0.00005.

Сравнить методы по скорости сходимости.

Варианты заданий:

1) $\sin(x+1) - 3y = 1.2$ 2) $\cos(x+1) + 2y = 0.5$
 $\cos(y) + 2x = 2$ $3x - \cos(y) = 3$

Лабораторная работа 3. Методом Лобачевского решить алгебраическое уравнение с точностью до 0.005.

Варианты заданий:

1) $x^3 - 2x + 2 = 0$ 2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$

Лабораторные работы 4–9. Определить собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы:

- 1) методом Данилевского
- 2) методом Леверье
- 3) методом Фаддеева
- 4) методом Крылова
- 5) методом вращений
- 6) степенным методом

Примеры вариантов заданий:

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 & 3.5 \\ 1.5 & 1 & 2 & 1.6 \\ 2.5 & 2 & 1 & 1.7 \\ 3.5 & 1.6 & 1.7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 1 & 1.2 & 2 & 0.5 \\ 1.2 & 1 & 0.4 & 1.2 \\ 2 & 0.4 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1.2 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Лабораторные работы 10-11. Получить решение системы линейных алгебраических уравнений с точностью до четырёх верных знаков методом простой итерации и методом Зейделя, предварительно проверить условия сходимости метода. Сравнить методы по скорости сходимости.

Примеры вариантов заданий:

1)

$$x_1 = 0.23 x_1 - 0.04 x_2 + 0.21 x_3 - 0.18 x_4 + 1.24$$

$$x_2 = 0.45 x_1 - 0.23 x_2 + 0.06 x_3 - 0.88$$

$$x_3 = 0.26 x_1 + 0.34 x_2 - 0.11 x_3 + 0.62$$

$$x_4 = 0.05 x_1 - 0.26 x_2 + 0.34 x_3 - 0.12 x_4 - 1.17$$

2)

$$x_1 = 0.21 x_1 + 0.12 x_2 - 0.34 x_3 - 0.16 x_4 - 0.64$$

$$x_2 = 0.34 x_1 - 0.08 x_2 + 0.17 x_3 - 0.18 x_4 + 1.42$$

$$x_3 = 0.16 x_1 + 0.34 x_2 + 0.15 x_3 - 0.34 x_4 - 0.42$$

$$x_4 = 0.12 x_1 - 0.26 x_2 - 0.08 x_3 + 0.25 x_4 + 0.83$$

Лабораторная работа 12. Получить решение системы линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня.

Примеры вариантов заданий

$$1) \quad 3.14 x_1 - 2.12 x_2 + 1.17 x_3 = 1.27$$

$$-2.12 x_1 + 1.32 x_2 - 2.45 x_3 = 2.13$$

$$1.17 x_1 - 2.45 x_2 + 1.18 x_3 = 3.14$$

$$2) \quad 2.45 x_1 + 1.75 x_2 - 3.24 x_3 = 1.23$$

$$1.75 x_1 - 1.16 x_2 + 2.18 x_3 = 3.43$$

$$-3.24 x_1 + 2.18 x_2 - 1.85 x_3 = -0.16$$

Контрольная работа в 5 семестре (ИОПК-1.1, ИОПК-2.3, ИОПК-2.4))

Контрольная работа состоит из 2 теоретических вопросов.

Перечень теоретических вопросов.

1. Определение абсолютной и относительной погрешности числа.
2. Постановка задачи интерполирования. Вывод формулы интерполяционного многочлена Лагранжа. Необходимые условия для существования и единственности многочлена Лагранжа.
3. Остаточный член многочлена Лагранжа. Недостатки многочлена Лагранжа. Минимизация погрешности многочлена Лагранжа.
4. Многочлены Чебышева и их свойства.
5. Эйткена. Погрешность вычисления по схеме Эйткена.
6. Разделенные разности и их свойства. Вывод формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов. Вычислительная погрешность многочлена Ньютона.
7. Конечные разности и их свойства. Вывод формул Ньютона для интерполирования вперед и назад. Вывод формул Гаусса. Вычислительная погрешность и погрешность метода.
8. Сплайн-функции. Определения сплайна, степени сплайна, дефекта сплайна. Определение параметров линейного сплайна.
9. Абсолютная и относительная погрешности функций многих переменных
10. Определение параметров параболического и кубического сплайнов.
11. Постановка задачи аппроксимации данных методом наименьших квадратов.
12. Аппроксимация данных алгебраическими полиномами.
13. Аппроксимация данных ортогональными полиномами Чебышева.
14. Аппроксимация данных ортогональными полиномами Чебышева дискретной переменной.

Критерии оценивания

Результаты контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если даны правильные ответы на все теоретические вопросы. В противном случае выставляется оценка «не зачтено».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в пятом семестре проводится в форме устного зачета по билетам. Продолжительность зачета 1 час.

Примерный перечень теоретических вопросов для проведения промежуточной аттестации в форме зачета в конце 5-го семестра:

ОСНОВНЫЕ ПРИНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Определения абсолютной и относительной погрешностей чисел.

Верные знаки числа.

Классификации погрешностей.

Погрешность вычисления функций многих переменных.

ПРИБЛИЖЕНИЯ ДАННЫХ

Интерполирование: многочлены Лагранжа, Ньютона; схема Эйткена.

Многочлены Чебышева.

Интерполирование при равноотстоящих узлах: формулы Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Бесселя.

Сплайн-функции: линейный, параболический и кубический сплайны.

Аппроксимация методом наименьших квадратов.

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Численное дифференцирование при неравноотстоящих узлах.

Численное дифференцирование при равноотстоящих узлах.

Оценка Рунге.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.

Метод Рунге оценки погрешности.

Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности.

Квадратурные формулы с равными коэффициентами.

Квадратурные формулы вычисления несобственного интеграла.

Квадратурные формулы вычисления неопределенного интеграла.

Методы Монте-Карло.

Результаты зачета определяются оценками «зачтено», «не зачтено»

Оценка «зачтено» выставляется, если студент выполнил все лабораторные работы и уверенно владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования, а также современным программным обеспечением.

Оценка «не зачтено» выставляется, если студент не выполнил одной лабораторной работы и не владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования в своей предметной области, а также современным программным обеспечением.

Зачет с оценкой в шестом семестре проводится в форме устного зачета с оценкой. Продолжительность зачета с оценкой 1 час.

Примерный перечень теоретических вопросов для проведения промежуточной аттестации в форме зачета с оценкой в конце 6-го семестра:

РЕШЕНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.
Отделение корней. Метод дихотомии.
Методы хорд и касательных. Метод Ньютона.
Метод простой итерации. Условие сходимости итерационного метода.
Ускорение сходимости итерационных методов.
Оценка погрешности решения нелинейных уравнений.
Решение систем нелинейных уравнений. Метод Ньютона.
Решение систем нелинейных уравнений. Метод простой итерации.
Метод Лобачевского решения полиномиального уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦ

Полная проблема собственных значений.
Метод Данилевского и его модификации.
Метод Крылова.
Методы ортогонализации.
Метод Леверье.
Метод Фаддеева.
Метод вращений
Степенной метод и метод λ - разности.
QR-алгоритм для определения собственных чисел произвольной матрицы.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Теоремы о сходимости итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.
Нормы векторов и матриц. Сходимость матричной геометрической прогрессии.
Метод простой итерации. Теорема о сходимости метода.
Методы Зейделя. Теорема о сходимости метода.
Метод Гаусса.
Метод прогонки.
Метод квадратного корня.
Градиентные методы.

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если студент выполнил все лабораторные работы, уверенно владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования, а также современным программным обеспечением.

Оценка «хорошо» выставляется, если студент выполнил все лабораторные работы, хорошо владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования в своей предметной области.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент не выполнил одну из лабораторных работ, недостаточно владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования в своей предметной области, а также современным программным обеспечением.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если студент не выполнил более двух лабораторных работ, не владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования в своей предметной области, а также современным программным обеспечением.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

5 семестр

Тест (ИОПК -4.2, ИОПК -4.4)

1. Погрешность многочлена Лагранжа будет наименьшей, если узлы интерполирования
 - а) являются равноотстоящими;
 - б) совпадают с корнями многочлена Чебышева соответствующей степени;
 - в) являются равноудаленными от оси абсцисс.
- 2.. Проходят ли сплайны через заданные точки?
 - а) Да;
 - б) Нет.
3. Для определения коэффициентов полинома методом наименьших квадратов решается система с матрицей:
 - а) Вандермонда,
 - б) Грама,
 - в) Фробениуса.
4. При аппроксимации ортогональными полиномами дискретной переменной матрица Грама является:
 - а) общего вида.
 - б) трехдиагональной,
 - в) диагональной,
5. При вычислении интеграла методом наивысшей алгебраической степени точности при $p(x) \equiv 1$ узлы квадратурной формулы совпадают с корнями многочлена
 - а) Якоби,
 - б) Чебышева,
 - в) Лежандра.

Ключи 1б), 2а), 3б), 4в), 5в)

6 семестр

Тест (ИОПК -4.2, ИОПК -4.4)

1. С какой скоростью сходится метод простых итераций решения нелинейных уравнений:
 - а) почти со скоростью геометрической прогрессии,
 - б) имеет квадратичную сходимость.
- 2.. Для нахождения корней полиномов используется метод
 - а) Лобачевского,
 - б) Крылова,
 - в) квадратного корня.

Ключи 1а), 2а).

Информация о разработчиках

Решетникова Галина Николаевна, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.

Кулешова Елена Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.

Грекова Татьяна Ивановна, канд. техн. наук, доцент.