

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:

Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Случайные процессы

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:

Прикладная математика и инженерия цифровых проектов

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2024

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП
Д.Д. Даммер

Председатель УМК
С.П. Сущенко

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- коллоквиум.

Контрольная работа (ОПК-1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

Контрольная работа состоит из 2 задач.

Примеры задач:

Задача 1. Дан процесс $\eta(t) = \xi \cos t + \mu \sin t$. Здесь случайные величины ξ и μ независимые и равномерно распределены в интервалах $[-1, 1]$, $[-2, 2]$ соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию, функцию корреляции случайного процесса $\eta(t)$.

Задача 2. Классифицировать состояния для цепи Маркова, заданной матрицей вероятностей переходов, записать ее в каноническом виде. Составить уравнения для нахождения среднего времени перехода из одного состояния в другое внутри замкнутого класса (все возможные варианты)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ответы:

Задача 1. $M\eta(t) = 0$, $D\eta(t) = 1/6[1 + \cos 2t]$, $R\eta(t, s) = 5/6[\cos(t - s) + \cos(t + s)]$

$$\text{Задача 2. } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{41} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + m_{41})$$

$$m_{72} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + m_{72})$$

$$m_{76} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + m_{76})$$

$$m_{33} = m_{55} = m_{14} = 1$$

Оценка Критерий оценивания контрольной работы

5 (отлично): Обучающийся решил две задачи правильно, сопроводил решение объяснением с обоснованием применения тех или иных теорем и определений.

4(хорошо): Обучающийся решил 1 задачу правильно, 2-ю решил с несущественными ошибками, сопроводил решение объяснением с обоснованием применения тех или иных теорем и определений.

3(удовлетворительно): Обучающийся решил только 1 задачу правильно, сопроводил решение объяснением с обоснованием применения тех или иных теорем и определений, 2-ю решил с существенными ошибками или не решил.

2(неудовлетворительно): Обучающийся не решил ни одну задачу, или решил с грубыми ошибками.

Коллоквиум (ОПК-1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

Коллоквиум содержит три вопроса

Перечень теоретических вопросов на коллоквиум:

1. Дайте определение марковского процесса.
2. Дайте определение марковской переходной функции.
3. Дайте определение матрицы вероятностей переходов ЦМ с дискретным временем.
4. Какое состояние называется несущественным?
5. Какой класс состояний называется апериодическим?
6. Дайте определение финального распределения вероятностей ЦМ.
7. Определение и основные свойства цепи Маркова с непрерывным временем.

8. Инфинитезимальные характеристики цепи Маркова с непрерывным временем.
9. Простейший поток. Определения.
10. Определение непрерывного марковского процесса.
11. Стохастический интеграл в форме Ито.
12. Цепи Маркова с дискретным временем. Основные определения.
13. Классификация состояний цепи Маркова с дискретным временем.
14. Эргодические теоремы для цепей Маркова с дискретным временем.
15. Цепи Маркова с дискретным временем. Вероятность перехода из несущественного состояния в замкнутый класс.
16. Цепи Маркова с дискретным временем. Среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс.
17. Цепи Маркова с дискретным временем. Среднее время перехода из состояния в состояние внутри замкнутого класса.
18. Цепи Маркова с дискретным временем. Статистический смысл стационарных (финальных) вероятностей.
19. Цепи Маркова с непрерывным временем. Обратная система дифференциальных уравнений Колмогорова.
20. Цепи Маркова с непрерывным временем. Прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова.
21. Цепи Маркова с непрерывным временем. Прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей состояний системы.
22. Финальные вероятности для цепи Маркова с непрерывным временем.
23. Процесс размножения и гибели.
24. Метод Хинчина.
25. Процесс чистого размножения.
26. Простейший поток. Распределение вероятностей числа наступивших событий в простейшем потоке(вывод).
27. Простейший поток. Основные вероятностные характеристики простейшего потока.

Пример билета для коллоквиума

1. Дайте определение финального распределения вероятностей ЦМ.
2. Среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс
3. Финальные вероятности для цепи Маркова с непрерывным временем

Оценка Критерий оценивания коллоквиума

- 5 (отлично): Обучающийся показал отличный уровень владения теоретическим материалом, полностью ответил на поставленные вопросы.
- 4(хорошо): Обучающийся показал достаточный уровень владения теоретическим материалом, но допустил несущественные ошибки или не полностью изложил материал в одном вопросе.
- 3(удовлетворительно): Обучающийся показал недостаточный уровень материалом, упустил важные определения или понятия, допустил ошибки при доказательстве теорем в двух вопросах.
- 2(неудовлетворительно): Обучающийся имеет существенные пробелы теоретического материала, не способен оказать теорему, не знает определения. Не показал знание вопросах в билете.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в пятом семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет состоит из двух задач, проверяющих ОПК-1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3, ИОПК-1.1. Продолжительность зачета 1 час.

Задача 1. Сетевой вирус поражает компьютеры с постоянной интенсивностью λ . Время, которое тратит системный администратор для уничтожения вируса на одном компьютере экспоненциальное с параметром μ . Найти стационарное распределение вероятностей числа зараженных компьютеров.

Задача 2.

Найти решение стохастического дифференциального уравнения:

Геометрическое броуновское движение

$$d\xi(t) = \mu\xi(t)dt + \sigma\xi(t)dw(t), \quad \xi(0) = \xi_0$$

Ответы:

Задача 1. $\pi_i = (1 - \lambda/\mu)(\lambda/\mu)^i$, i – число зараженных компьютеров

Задача 2.

$$\xi(t) = \xi_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma w(t) \right\}$$

Оценка Критерий оценивания зачета

1. (зачтено): Обучающийся решил две задачи правильно, сопровождал решение объяснением с обоснованием применения тех или иных теорем и определений; обучающийся решил 1 задачу правильно, 2-ю решил с несущественными ошибками, сопровождал решение объяснением с обоснованием применения тех или иных теорем и определений; обучающийся решил только 1 задачу правильно, сопровождал решение объяснением с обоснованием применения тех или иных теорем и определений, 2-ю решил с существенными ошибками или не решил.

2 (не зачтено): Обучающийся не решил ни одну задачу, или решил с грубыми ошибками.

Экзамен в пятом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Дайте определение марковского процесса.
2. Дайте определение марковской переходной функции.
3. Дайте определение матрицы вероятностей переходов ЦМ с дискретным временем.
4. Какое состояние называется несущественным?
5. Какой класс состояний называется апериодическим?
6. Дайте определение финального распределения вероятностей ЦМ.
7. Определение и основные свойства цепи Маркова с непрерывным временем.
8. Инфинитезимальные характеристики цепи Маркова с непрерывным временем.
9. Простейший поток. Определения.
10. Определение непрерывного марковского процесса.
11. Стохастический интеграл в форме Ито.
12. Цепи Маркова с дискретным временем. Основные определения.
13. Классификация состояний цепи Маркова с дискретным временем.
14. Эргодические теоремы для цепей Маркова с дискретным временем.

15. Цепи Маркова с дискретным временем. Вероятность перехода из несущественного состояния в замкнутый класс.
16. Цепи Маркова с дискретным временем. Среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс.
17. Цепи Маркова с дискретным временем. Среднее время перехода из состояния в состоянии внутри замкнутого класса.
18. Цепи Маркова с дискретным временем. Статистический смысл стационарных (финальных) вероятностей.
19. Цепи Маркова с непрерывным временем. Обратная система дифференциальных уравнений Колмогорова.
20. Цепи Маркова с непрерывным временем. Прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова.
21. Цепи Маркова с непрерывным временем. Прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей состояний системы.
22. Финальные вероятности для цепи Маркова с непрерывным временем.
23. Процесс размножения и гибели.
24. Метод Хинчина.
25. Процесс чистого размножения.
26. Простейший поток. Распределение вероятностей числа наступивших событий в простейшем потоке(вывод).
27. Простейший поток. Основные вероятностные характеристики простейшего потока.
28. Определение диффузионного случайного процесса.
29. Уравнение Фоккера-Планка для однородного диффузионного процесса.
30. Уравнение Фоккера-Планка для диффузионного процесса авторегрессии.
31. Уравнение Фоккера-Планка для винеровского диффузионного процесса.
32. Найти решение стохастических дифференциальных уравнений:
33. Арифметическое броуновское движение .
34. Геометрическое броуновское движение .
35. Диффузионный процесс авторегрессии .
36. Броуновский мост .

Пример билета на экзамен

1. Дайте определение матрицы вероятностей переходов ЦМ с дискретным временем
2. Цепи Маркова с непрерывным временем. Обратная система дифференциальных уравнений Колмогорова
3. Уравнение Фоккера-Планка для однородного диффузионного процесса.

Оценка Критерий оценивания ответа на экзамене

5 (отлично): Обучающийся показал отличный уровень владения всеми теоретическими вопросами, показал все требуемые умения и навыки решения практических задач.

4(хорошо): Обучающийся овладел всеми теоретическими вопросами, частично показал основные умения и навыки при решении практических задач.

3(удовлетворительно): Обучающийся имеет недостаточно глубокие знания по теоретическим разделам дисциплины, показал не все основные умения и навыки при решении практических задач.

2(неудовлетворительно): Обучающийся имеет существенные пробелы по отдельным теоретическим разделам дисциплины и не владеет основными умениями и навыками решения практических задач.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи

Задача 1 (ОПК-1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

Найти финальное распределение цепи Маркова с дискретным временем, которая определяется матрицей вероятностей переходов за один шаг

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & ? \\ q & ? \end{bmatrix}$$

Задача 2 (ОПК-1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

Система состоит из 3 идентичных каналов, каждый из которых работает независимо от других случайное время до отказа. Время безотказной работы распределено по экспоненциальному закону с параметром λ . Отказавший элемент ремонтируется, причем время ремонта распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . Записать матрицу инфинитезимальных характеристик для цепи Маркова, у которой под состоянием системы понимается число рабочих каналов.

Ответы:

$$\text{Задача 1. } \pi_1 = \frac{q}{1-q}, \quad \pi_2 = \frac{p}{p+q}$$

$$\text{Задача 2. } P = \begin{bmatrix} -3\mu & 3\mu & 0 & 0 \\ \lambda & -(\lambda+2\mu) & 2\mu & 0 \\ 0 & 2\lambda & -(2\lambda+\mu) & \mu \\ 0 & 0 & 3\lambda & -3\lambda \end{bmatrix}.$$

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

Информация о разработчиках

Пауль Светлана Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики НИ ТГУ.

Моисеева Светлана Петровна, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики НИ ТГУ.