Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Математический анализ

по направлению подготовки

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль) подготовки:
Искусственный интеллект и разработка программных продуктов

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
А.В. Замятин

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук.

ИОПК-1.2. Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.

ИОПК-1.3. Обладает необходимыми знаниями для исследования информационных систем и их компонент.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– тесты;

– контрольная работа;

Тест по разделу 1 (ИОПК-1.1.)

1. Выберите выражения, которые являются неопределенностями:

a) 1^∞, ∞^∞, 0^0, 0^∞ *b*) 1^∞, 0^0, 0^∞

c) 1^∞, ∞^0, 0^0 *d*) 1^∞, ∞^0, 0^∞

2. Укажите область определения функции $y = \arcsin x$

a) $(0, \infty)$ *b*) $(-1, 1)$

c) $(-\infty, +\infty))$ *d*) $[-1,1]$

3. Выберите из предложенных вариантов тот, который является геометрической интерпретацией формулы Лагранжа:

a) не существует точки, принадлежащей отрезку (a, b), в которой касательная параллельна секущей, соединяющей точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$;

b) существует точка, принадлежащая отрезку (a, b), в которой касательная перпендикулярна секущей, соединяющей точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$;

c) существует точка, принадлежащая отрезку (a, b), в которой касательная параллельная секущей, соединяющей точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$;

d) существует точка, принадлежащая отрезку (a, b), в которой касательная параллельна любой секущей;

e) верного ответа нет.

4. Чем можно объяснить наличие остаточного члена формулы Тейлора?

a) тем, что остаточный член стремится к нулю;

b) тем, что остаточный член стремится к бесконечности;

c) тем, что остаточный член – это бесконечно малая величина;

d) тем, что произвольная функция не всегда полином.

5. Выберете из предложенных вариантов тот, который отражает условие существования производной функции в точке x_0:

a) $f'(x_0) \neq 0$;

b) $f'(x_0 - 0) > f'(x_0 + 0)$;

c) $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$;

d) $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$;

e) производная в точке x_0 существует всегда.

6. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ для функции $z=ye^{\frac{x}{y}}$.

a) $xye^{\frac{x}{y}}$ *b*) $xe^{\frac{x}{y}-1}$

c) $e^{\frac{x}{y}}$ *d*) $ye^{\frac{x}{y}}$

e) верного ответа нет.

7. Введите пропущенные слова/выражения, чтобы приведенное ниже утверждение стало верным.

«Теорема: интегралы по любым _____________, окружающим особую точку, _____________.»

8. Для вычисления тройного интеграла от данной функции $u=f(x, y, z)$ по указанной области (V) рекомендуется действовать по следующей схеме (установите последовательность действий по порядку):

	Выбираем порядок интегрирования, который диктуется видом области интегрирования. Область (V) проецируется на одну из трех координатных плоскостей. В результате мы определяем проекцию области (V) – плоскую область (D), и уравнения поверхностей, которые ограничивают область (V).
	Строим в системе координат *OXYZ* область интегрирования.
	Выносим для удобства проекцию – область (D) на отдельный рисунок и дальнейшую расстановку пределов осуществляем как в двойном интеграле.
	Последовательно интегрируя, вычисляем ответ.
	Определяем пределы изменения для каждой из трех переменных x, y, z, определяя область интегрирования системой неравенств.
	Записываем тройной интеграл в виде повторного.

9. Криволинейный интеграл $\int\limits_l P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ - это…

a) масса материальной кривой;

b) работа, совершаемая при перемещении материальной точки вдоль линии в силовом поле;

c) длина кривой;

d) центр масс кривой

10. Для знакоположительного ряда имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$. Составьте верные утверждения

1.	$l=0$	A.	Ряд сходится
2.	$l=e^{-1}$	B.	Ряд расходится
3.	$l=1$	C.	Ряд может сходиться, а может и расходиться. Требуются дополнительные исследования.
4.	$l=e$		

Ответ:

1	2	3	4

Ключи: 1 c), 2 d), 3 c), 4 a), 5 d), 6 c), 7 простым контуром; равны между собой) 8 2-1-3-6-4-5), 9 b), 10 1-A;2-A;3-C;4-B).

Критерии оценивания: тест считается пройденным, если обучающий ответил правильно как минимум на половину вопросов.

Примеры контрольных работ (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИПК 1.3):

Контрольная работа по теме «Введение в анализ»

I. Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-4n}}{\sqrt[3]{2n^3+1}}$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{n-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+2x}{3x^2+1}$;

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+2)-\ln 2}{x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$; 10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(2-x)}{\sqrt{2x}-2}$.

II. Определить порядок б. м. $\alpha(x)$ при $x\to 0$ относительно x:

1. $\alpha(x)=\ln(1+\sqrt[3]{x^2\cdot\operatorname{tg}x})$, 2. $\alpha(x)=\sqrt{2x+1}-1$.

III. Найти точки разрыва функции, указать их характер. Построить график функции в окрестности точек разрыва:

1. $f(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ x<0,\\ x^2,\ \textit{если}\ 0\le x<1,\\ x+2,\ \textit{если}\ x\ge 1.\end{cases}$ 2. $y=\dfrac{2^{\frac{1}{1-x}}}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$, 3. $y=\dfrac{1}{x^2-4}$.

Контрольная работа
по теме «Дифференциальное исчисление функции одного переменного»

I. Найти производные следующих функций:

1. $y=(e^{\cos x}+3x)^2$; 2. $3^x+3^y=x-2y$; 3. $y=(\mathrm{tg}\,2x)^{\mathrm{ctg}(\sqrt{\frac{x}{2}})}$;

II. Найти вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$:

1. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, 2. $\begin{cases} x=\cos(t/2), \\ y=t-\sin t. \end{cases}$ 3. $y=\sin(x-y)$

III. . Пользуясь правилом Лопиталя найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1-0}(\sin \pi x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

IV Провести полное исследование функции $y=xe^{-\frac{1}{x}}$ и построить её график

Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл»

1. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$. 2. $\int\dfrac{\sin\ 3xdx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. 3. $\int\dfrac{dx}{arctgx(1+x^2)}$.

4. $\int\dfrac{e^{2x}dx}{e^{2x}+2}$. 5. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$. 6. $\int(1+x)\sin 2x\,dx$.

7. $\int\dfrac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ 8. $\int\dfrac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$. 9. $\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{\sqrt{x^3}+4}}$.

Контрольная работа по теме «Определенный интеграл»

1. $\int\limits_0^{\pi}(2x+\sin 2x)dx$ 3. $\int\limits_{1/2}^{1}\sqrt{4x-2}dx$

2. $\int\limits_0^1 xe^x$ 4. $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{x^2+x}$

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

   а) $\int\limits_3^{\infty}\dfrac{x^2dx}{x^2+4}$ б) $\int\limits_0^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   а) $y=x^3$, $y=x^2$, $x=-2$, $x=1$.

   б) $\rho=3-2\cos\varphi$, $\beta=\frac{1}{2}$

7. Вычислить длину дуги кривой $y=1-\ln\sin x$, от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{4}$

Контрольная работа по теме «Ряды»

1. Исследовать сходимость рядов:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n^3+1}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+1}\right)^{n^2/2}$.; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\cdot 3^n}$. d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{1-\cos\frac{1}{n}}$.,

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n^3+4)$. e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)\cdot 10^n}$.

2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n+1}}{n(n+2)(n+3)}(x-10)^n\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{(n+1)\sqrt{\ln^3(n+1)}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{10^n+20^n}\ .$$

3. Доказать равномерную сходимость по определению на [0;1] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{20n-7}$.

Функции нескольких переменных.

1. Найти область определения функций. Сделать чертеж. Дать ответ на вопрос: входят ли границы в эту область $\boldsymbol{z=\ln y+\sqrt{y-x}}$.
2. Найти указанные производные

   $u=x^2y^2z+2x-3yz.\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=?$
3. Найти частные производные от неявно заданной функции

   $\boldsymbol{z=\sin^2 x+\cos^2 y+\mathrm{tg}^2\, z.\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=?}$
4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2-xy+y^2$ в области $|x|+|y|\le 1$
5. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=x^2F\left(\frac{x}{z},\frac{x}{y}\right)$ уравнению

   $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=2u$.
6. Определить, в каких точках поверхности $x^2+y^2/5-z^2=1$ нормаль параллельна вектору $\vec{s}=\{2,\sqrt{5},2\}$

Контрольная работа по теме «Кратные интегралы»

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx\int_{x-4}^{4-x} f(x,y)dy$$

2. Расставить границы интегрирования

$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \text{D:} \quad y = x, \quad y = 2x, \quad x+y = 6$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y = x$, $y = 0$.

4. Найти объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $x^2 + y^2 - 8x = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$.

5. Найти массу тела, ограниченного поверхностями : $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$, если $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$.

Контрольная работа по теме «Элементы векторного анализа»

7. Вычислить криволинейный интеграл $1^{\text{го}}$ рода

$$\int_{(L)} (1+\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{dl}\text{, где } \boldsymbol{L}: \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{ay}\ .$$

8. Вычислить работу силового поля. Проверить зависит ли интеграл от траектории интегрирования? Если не зависит, то упростить вычисления.

$$\int_{(L)} (\boldsymbol{xy}-1)\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2\boldsymbol{dy}\text{, где } \boldsymbol{L}: \boldsymbol{AB}; \boldsymbol{A}(1,0); \boldsymbol{B}(0,2)\ .$$

3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{(S)} \boldsymbol{dS}$, где **S** – часть плоскости $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}$, заключенная в первом октанте.

1. Найти поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{A}} = 4\vec{\boldsymbol{i}} - 9\vec{\boldsymbol{j}}$ через внешнюю сторону поверхности параболоида вращения $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{z}^2$, огранич. плоскостью $\boldsymbol{y} = 4$, при $\boldsymbol{x} \le 0, \boldsymbol{z} \ge 0$.

5. $\vec{A} = (x+\ln|z|)\vec{i} + (y+\ln|x|)\vec{j} + (z+\ln|y|)\vec{k}.\quad \operatorname{div}\vec{A} = ?\quad , \operatorname{rot}\vec{A} = ?$

Контрольная работа по теме «Функции комплексного переменного»

1. а) Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-2}$. Результат вычислений представить в алгебраической форме.

   б) Представить в алгебраической форме: $(-1-i)^{4i}$.

2. а) Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z_0 = 1-i$ при отображении $\omega = z^2$.

   б) Проверить функцию на аналитичность: $\omega = (z^*)^2 \cdot z$.

3. Найти аналитическую функцию $f(z) = U + iV$ по известной действительной части и значению $f(z_0)$: $U(x,y) = x^3 - 3xy^2;\quad f(i) = -i.$

4. Вычислить интеграл: $\int_L z^2 \operatorname{Im} z dz$, где L - отрезок прямой от точки $z_1 = 0$, до точки $z_2 = 1-2i$.

5. Вычислить интеграл: $\int\limits_L \frac{dz}{z^3(z-2i)^2}$, где $L: |z-2i| = 1$.

Контрольная работа по теме «Комплексные ряды. Вычеты»

1. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+2z-3)}$ в ряд Лорана с центром в $z_0 = 1$ в кольце $|z-1| > 4$.

2. Найти и построить область сходимости ряда:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(in)}{(z+i+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i+1)^n}{(2n+i)(4+3i)^n}.$$

3. Вычислить следующие интегралы:

а) $\oint\limits_{|z-2|=4} \frac{zdz}{e^z + e^2}$ б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{exp(1/z)+1}{z} dz$ в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x dx}{x^2 + 4x + 5}$

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

% выполнения задания	**Соответствие традиционной оценке**	**Определение оценки**
90%÷100%	«Отлично»	Отличное понимание предмета, всесторонние знания, отличные умения и владение опытом практической деятельности, необходимые результаты обучения сформированы, их качество оценено количеством баллов, близким к максимальному
70% - 89%	«Хорошо»	Достаточно полное понимание предмета, хорошие знания, умения и опыт практической деятельности, необходимые результаты обучения сформированы, качество ни одного из них не оценено минимальным количеством баллов
55% - 69%	«Удовл.»	Приемлемое понимание предмета, удовлетворительные знания, умения и опыт практической деятельности, необходимые результаты обучения сформированы, качество некоторых из них оценено минимальным количеством баллов
0% - 54%	«Неудовл.»	Результаты обучения не соответствуют минимально достаточным требованиям

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен во втором и третьем семестрах проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из двух частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть представляет собой два вопроса по теоретическому материалу, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.3. Ответы на вопросы первой части даются в развернутой форме.

Вторая часть содержит два вопроса, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.3, оформленные в виде практических задач. Ответ на вопросы второй части предполагает решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Вопрос 1. Множества. Сравнение множеств по числу элементов. Супремум и инфимум, свойства.
2. Вопрос 2. Определение предела последовательности. Бесконечно малые последовательности, свойства бесконечно малых последовательностей. Теоремы о пределе монотонной последовательности.
3. Вопрос 3. Предел функции. Определение.
4. Вопрос 4. Признак Больцано-Коши для функции.
5. Вопрос 5. Сравнение бесконечно больших величин и бесконечно малых величин.
6. Вопрос 6. Связь понятий непрерывности и предела функции.
7. Вопрос 7. Типы разрывов.
8. Вопрос 8. Обратная функция, теорема о существовании и монотонности обратной функции.
9. Вопрос 9. Замечательные пределы (с доказательством).
10. Вопрос 10. Типы неопределенных выражений.
11. Вопрос 11. Особые случаи производных.
12. Вопрос 12. Формулы Коши и Лагранжа.
13. Вопрос 13. Дифференциал, теорема и дифференцируемости функции.
14. Вопрос 14. Разложение функций в ряд Тейлора.
15. Вопрос 15. Связь понятия выпуклости с касательной и производной.
16. Вопрос 16. Неопределенный интеграл, определение.
17. Вопрос 17. Приемы интегрирования: подведение под знак дифференциала, замена переменной, интегрирование по частям.
18. Вопрос 18. Метод неопределенных коэффициентов, интегрирование рациональных дробей.
19. Вопрос 19. Подстановки Эйлера.
20. Вопрос 20. Интегрирование тригонометрических функций.
21. Вопрос 21. Суммы Дарбу. Свойства сумм Дарбу.
22. Вопрос 22. Свойства определенных интегралов с доказательством.
23. Вопрос 23. Длина дуги плоской кривой, определение и вычисление.
24. Вопрос 24. Вычисление площадей.
25. Вопрос 25. Объем тела вращения.
26. Вопрос 26. Несобственные интегралы первого рода, практический признак сходимости несобственных интегралов первого рода.
27. Вопрос 27 Несобственные интегралы второго рода, практический признак сходимости несобственных интегралов второго рода.
28. Вопрос 28. Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов.
29. Вопрос 29. Признак сходимости Больцано-Коши, признак Дирихле, признак Абеля для знакопеременных рядов.
30. Вопрос 30. Предел функции многих переменных. Повторные пределы, теорема об их равенстве.
31. Вопрос 31. Частные производные функции многих переменных, градиент.
32. Вопрос 32. Ряд Тейлора функции многих переменных.
33. Вопрос 33. Необходимое и достаточное условие экстремума функции многих переменных.
34. Вопрос 34. Криволинейные интегралы первого рода: определение, вычисление.
35. Вопрос 35. Криволинейные интегралы второго рода: определение, вычисление, векторная форма записи, физический смысл.

36. Вопрос 36. Вычисление двойных интегралов по прямоугольной области и по криволинейной трапеции.

37. Вопрос 37. Тройной интеграл - определение, вычисление.

38. Вопрос 38. Поверхностный интеграл первого рода – определение, вычисление.

39. Вопрос 39. Поверхностный интеграл второго рода – определение, вычисление.

40. Вопрос 40. Интеграл от функции комплексного переменного.

Примеры задач:

1. Вычислить предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{3n^3+n-8}}{n-6}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-...+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n}{n+1}+\dfrac{n\cdot 2^{-n}}{n+2}$,

2. Вычислить предел функции

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-5x^2+3x+1}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2x^2+1}-\dfrac{x^2}{2x-6}$, 3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-3}{x^2-3x+2}$,

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{5+3^{x+1}}$, 6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, 17) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}$,

8) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot ctg5x$, 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos x}}{e^{x^2}-1}$, 10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\dfrac{x}{2}}$,

11). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$, 12) $\lim\limits_{x\to0}(1+6tgx)^{\frac{\sin 2x}{x^2+3x^3}}$,

3. Найти точки разрыва функции и определить тип $y(x)=\ln\dfrac{x^2}{x+1}$,

4. Вычислить производные заданных функций

1) $y=x(\arcsin x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}$, 2) $y=\left(\arcsin\sin^2 x\right)^{arctgx}$, 3) $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x$

5. Найти интеграл, применяя простейшие преобразования $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{4-5\ln x}}$,

6. Найти интеграл, используя интегрирования по частям $\int x^2e^{3x}dx$.

7. Найти интеграл, выделив полный квадрат $\displaystyle\int\frac{(2x+3)dx}{x^2-5x+11}$.

8. Найти интеграл от рациональных дробей $\displaystyle\int\frac{(2x^2-x)dx}{(x+4)(x^2+5)}$.

9. Найти интеграл от тригонометрических функций $\displaystyle\int\frac{\sin^5 xdx}{\cos^3 x}$.

10. Вычислить определенные интегралы

1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt2}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$, 2) $\displaystyle\int_{-3}^{0}(x-2)e^{-\frac{x}{3}}dx$, 3) $\displaystyle\int_1^9\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x$ $y=3x-1$.

12. Найти объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OX, ограниченной линиями $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится в случае демонстрации высокого уровня знаний определений, формулировок теорем и их доказательств, умения решать практические задачи с использованием оптимальных методов и анализировать полученный результат.

Оценка «хорошо» ставится в случае, если студент демонстрирует в целом успешное, но содержащее отдельные ошибки в определениях, формулировках теорем и их доказательствах, способен предложить оптимальный метод решения для практических задач, возможно допускает незначительные ошибки при вычислениях.

Оценка «удовлетворительно» ставится в случае, если студент демонстрирует частичное, фрагментарное владение определениями, формулировками теорем и их доказательствами, способен предложить метод для решения для практических задач, возможно допускает незначительные вычислительные ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» ставится в случае, если студент демонстрирует низкий уровень знаний определений, формулировок теорем и их доказательств.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Примеры типовых тестов

1. Установите соответствие между функцией и её дифференциалом

функция	производная
$y=\sqrt[3]{\sin x}$	$dy=\dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$
$y=\sqrt{\sin x}$	$dy=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}dx$
$y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$	$dy=-\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin^3 x}}dx$
$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$	$dy=-\dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^4 x}}dx$
	$dy=\dfrac{\cos x}{2\sqrt[3]{\sin x}}dx$
	$dy=\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}dx$

2. Определите порядок малости бесконечно малой функции $\dfrac{\ln\left(\dfrac{1+x^3}{x^3}\right)}{x}$ относительно $\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$

K= ______.

3. Функция $y=6x\cdot e^{-2x}$ убывает для значений x

1. $x\in(-\infty;1/2)$
2. $x\in(1/2;+\infty)$

3. $x \in (-\infty; -1/2) \cup (1/2; +\infty)$
4. $x \in (-1/2; +\infty)$
5. $x \in (1/2; 0)$.

4. Интеграл $\int x^2 e^{2x^3} dx$ равен

1. $e^{2x^3} + C$
2. $6e^{2x^3} + C$
3. $\frac{1}{2} e^{2x^3} + C$
4. $\frac{1}{6} e^{2x^3} + C$ +

5. Укажите верное разложение рациональной дроби $\frac{2x^2+1}{(x^2-4)(x^2+1)}$ на сумму простых дробей с неопределёнными коэффициентами

1. $\frac{2x^2+1}{(x^2-4)(x^2+1)} = \frac{A}{x^2-4} + \frac{B}{x^2+1}$
2. $\frac{2x^2+1}{(x^2-4)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x^2+1}$
3. $\frac{2x^2+1}{(x^2-4)(x^2+1)} = \frac{A}{x^2-4} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$
4. $\frac{2x^2+1}{(x^2-4)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

6. Интеграл $\int \frac{dx}{4\cos x + 6\sin x + 5}$ равен

1. $\frac{1}{\sqrt{27}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 6 - \sqrt{27}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 6 + \sqrt{27}} \right| + C$
2. $-\frac{2}{tg\frac{x}{2} + 3} + C$

3. $\dfrac{2\left(tg\dfrac{x}{2}+3\right)^3}{3}+C$

4. $\ln\left|4\cos x+6\sin x+5\right|+C$

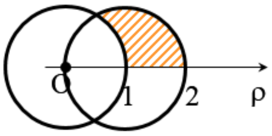
7. Укажите из предложенных подстановку с помощью которой можно избавится от иррациональности в интеграле $\int\frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\cdot\sqrt{x}}dx$

1. $x=t^2-1$
2. $x=t^2$
3. $t^2=\dfrac{x+1}{x}$

8.Область интегрирования D ограничена линиями $y = 1$, $y = x$, $x + y = 4$. Расставьте пределы интегрирования $\int\limits_a^b dy\int\limits_c^d f(x;y)dx$

a=______ Ответ: 1
b=______ Ответ: 2
c=______ Ответ: y
d=______ Ответ: 4-y или -y+4

9. Найдите площадь области, представленной на рисунке



1. $S=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (правильный)
2. $S=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $S=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$
4. $S=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. $S=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
6. $S=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

10. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L (y-1)dx+5xdy$ по прямой L: $y=4x+2$ от точки $M_1(-2;9)$ до точки $M_2(0;8)$

Ответ: ____-46____

11. Для функции $z=z(x;y)$ известно

$z'_x(M)=z'_y(M)=0$

$z''_{xx}(M)=5;\ z''_{xy}(M)=1;\ z''_{yy}(M)=-2$

Тогда точка М

является точкой минимума
не является точкой экстремума
является точкой максимума
является стационарной точкой
не является стационарной точкой

Информация о разработчиках

Рожкова Светлана Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, профессор

Шкленник Мария Александровна, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ