

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальная геометрия и топология

по направлению подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная и прикладная физика»

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
С.Н. Филимонов

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способность применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.2 – Применяет физические и математические модели и методы при решении теоретических и прикладных задач

ИПК 1.2 Владеет практическими навыками использования современных методов исследования в выбранной области

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить концепции топологического пространства и гладкого многообразия как общего подхода к определению непрерывных и гладких структур на множествах.

– Сформировать представление о дифференциальной геометрии как неотъемлемой части понятийного аппарата современной теоретической и математической физики.

– Изучить основы геометрии гладких многообразий и связанных с ними дифференциально-геометрических конструкций;

– Освоить приложения дифференциальной геометрии для решения практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Семестр 5, зачет с оценкой.

Семестр 6, экзамен.

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, классическая механика, тензорный анализ и интегральные уравнения (для обучения в 6-ом семестре).

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 з.е., 252 часов, из которых:

– лекции: 64 ч.;

– практические занятия: 64 ч.;

в том числе практическая подготовка: 64 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Тема 1. Основные понятия дифференциальной геометрии и топологии

Введение. Дифференциальная геометрия как язык теоретической физики.

Отображения, карты, атласы.

Определение и примеры гладких многообразий. Топология многообразия. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы. Гладкие отображения.

Касательное пространство. Касательное расслоение. Векторные поля. Интегральные кривые векторных полей. Теорема о выпрямляемости. Дифференциал гладкого отображения.

Подпространства и подмногообразия Интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса.

Факторпространства.

Хаусдорфовы пространства. Связные пространства. Аксиомы счетности. Компактные пространства.

Прямая сумма, тензорное произведение линейных пространств. Сопряженное и комплексно сопряженное пространства. Тензоры на линейном пространстве. Тензорный закон преобразования. Умножение тензоров. Тензорная алгебра. Свертка тензора. Тензоры как полилинейные функционалы. Подъем и опускание индексов. Подстановка индексов. Симметризация и альтернирование тензора. Внешняя алгебра на линейном пространстве.

Векторные расслоения. Операции с векторными расслоениями: прямая сумма, тензорное произведение, дуальное расслоение, тензорная алгебра. Подрасслоения и факторрасслоения, внешняя алгебра расслоения, редукция расслоения. Теоремы вложения.

Тема 2. Дифференциальное исчисление на многообразиях

Дифференцирование тензорных полей.

Переносы тензорных полей посредством диффеоморфизмов. Прообразы ковариантных тензорных полей при гладких отображениях. Поток, порожденный векторным полем. Производная Ли. Векторные поля Киллинга.

Внешний дифференциал. Свертка и производная Ли дифференциальной формы. Оператор Ходжа. Примеры. Операции классического векторного анализа. Инвариантная форма уравнений Максвелла.

Ковариантное дифференцирование, ковариантный дифференциал на векторном расслоении. Линейная связность как поле горизонтальных подпространств. Параллельный перенос в векторном расслоении, группа голономии. Тензор кривизны связности в векторном расслоении. Связности на метризованных векторных расслоениях.

Тема 3. Разбиение единицы.

Паракомпактные пространства. Разбиение единицы. Простейшие приложения разбиения единицы.

Тема 4. Интегрирование на многообразии.

Интегрирование дифференциальных форм в $\mathbb{R}^n$. Интегрирование по цепям. Теоремы Стокса для интеграла по цепям. Ориентируемые многообразия. Интегрирование по ориентированному многообразию. Теорема Стокса. Интегрирование на римановом многообразии. Интегрирование на группе Ли

Тема 5. Когомологии многообразий

Понятие о когомологиях де Рама. Редукция и гомотопическая инвариантность когомологий де Рама. Разложение Ходжа – де Рама. Лемма Пуанкаре. Примеры вычисления когомологий де Рама. Когомологии сфер. Когомологии Чеха. Изоморфизм де

Рама – Чеха. Сингулярные гомологии и когомологии. Изоморфизм де Рама. Элементы гомологической алгебры. Последовательность Майера – Вьеториса. Характеристические классы, характеры Чженя и Понтрягина векторного расслоения. Характеристический класс Эйлера векторного расслоения. Эйлера характеристика многообразия.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки и обсуждения задач практических занятий и коллоквиума и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр. Оценочные материалы текущего контроля размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» – <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет с оценкой в 5 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Экзамен в 6 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» – <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» -

<https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=96> <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=24827>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине (<https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>).

в) План практических занятий по дисциплине

1. Примеры гладких многообразий.

2. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы.

3. Векторные поля. Интегральные кривые векторных полей. Теорема о выпрямляемости. Дифференциал гладкого отображения.

4. Подпространства и подмногообразия.

5. Интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса.

6. Факторпространства.

7. Хаусдорфовы пространства.

8. Связные пространства.

9. Компактные пространства.

10. Прямая сумма, тензорное произведение линейных пространств. Сопряженное и комплексно сопряженное пространства.

11. Тензоры на линейном пространстве.

12. Внешняя алгебра на линейном пространстве.

13. Векторные расслоения. Операции с векторными расслоениями: прямая сумма, тензорное произведение, дуальное расслоение, тензорная алгебра. Подрасслоения и факторрасслоения, внешняя алгебра расслоения, редукция расслоения. Теоремы вложения.

14. Переносы тензорных полей посредством диффеоморфизмов. Прообразы ковариантных тензорных полей при гладких отображениях. Поток, порожденный векторным полем.

15. Производная Ли.

16. Векторные поля Киллинга.
 17. Внешний дифференциал. Свертка и производная Ли дифференциальной формы.
 18. Оператор Ходжа. Операции классического векторного анализа.
 19. Ковариантное дифференцирование, ковариантный дифференциал на векторном расслоении.
 20. Параллельный перенос в векторном расслоении, группа голономии.
 21. Тензор кривизны связности в векторном расслоении.
 22. Связности на метризованных векторных расслоениях.
 23. Интегрирование дифференциальных форм в R^n .
 24. Интегрирование по цепям. Теоремы Стокса для интеграла по цепям.
 25. Ориентируемые многообразия. Интегрирование по ориентированному многообразию. Теорема Стокса.
 26. Интегрирование на римановом многообразии. Интегрирование на группе Ли
 27. Когомологии де Рама. Лемма Пуанкаре.
 28. Последовательность Майера – Вьеториса.
 29. Характеристические классы векторного расслоения.
- г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов. Самостоятельная работа студентов состоит из следующих частей:
- проработка конспекта;
 - проработка материала по одному из основных рекомендованных учебников;
 - самостоятельное решение задач и подготовка к практическим занятиям;
 - проработка дополнительных материалов по дисциплине в соответствии с тематикой учебной практики
- Примерные темы рефератов для самостоятельной углубленной работы студентов в соответствии с тематикой учебной практики:
- 1) Главные и ассоциированные расслоения. Расслоения с типичным слоем.
 - 2) Связности в главных и ассоциированных расслоениях.
 - 3) Калибровочные поля как связности в главных и ассоциированных расслоениях.
 - 4) Когомологии пучков.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия: методы и приложения. – М.: Наука. 1979. – 760 с.
2. Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. – М. Наука, Физматлит. 1995. – 416 с.
3. Ф. Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. – М.: Мир. 1987. – 304 с.
4. М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. – М.: Наука. Физ.-мат. лит. 1987. – 480 с.
5. М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука. Физ.-мат. лит. 1987. – 496 с.
6. В.В. Трофимов. Введение в геометрию многообразий с симметриями. – М.: Изд-во МГУ. 1989. – 360 с.
7. И.П. Волобуев, Ю.А. Кубышин. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля. – М.: Эдиториал УРСС. 1998. – 224 с

б) дополнительная литература:

1. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. В 2 т. – М. Наука. 1981. 344 с.+344 с.
2. М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. – М.: Изд-во «Факториал». 1998. – 496 с.
3. С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. – М.: Мир. 1970. – 412с.

4. А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во МГУ. 1980. – 440 с.
5. А.Т. Фоменко, С.П. Новиков. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука. 1987. – 432 с.
6. С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М.: Мир. 1964. – 534 с.
7. А.Т. Фоменко. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. – М.: Изд-во МГУ. 1983. – 216 с.
8. Р. Зуланке, П. Винтген. Дифференциальная геометрия и расслоения. – М.: Мир. 1975. – 352 с.
9. Р. Уэллс. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. – М.: Мир. 1973. – 288 с.
10. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии. В 2 т. – М.: Мир. 1982. --- 496 с.+366 с.
11. А.Т. Фоменко. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. – М.: Изд-во МГУ. 1992. – 432 с.
12. Н. Стинрод, У. Чинн. Первые понятия топологии. – М.: Мир. 1967. – 224 с.

в) ресурсы сети Интернет:

Differential geometry

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry

Glossary of differential geometry and topology

https://en.wikipedia.org/wiki/Glossary_of_differential_geometry_and_topology

Lecture Notes on Differential Geometry

<http://people.math.gatech.edu/~ghomi/LectureNotes/>

Topics in Differential Geometry

www.mat.univie.ac.at/~michor/dgbook.pdf

Введение в теорию гомологий

www.mi.ras.ru/noc/lectures/03kazarian.pdf

М.О. Катанаев Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 1

<http://www.mathnet.ru/links/960e758fab2c06fbb3eb09f8d38973ed/book1603.pdf>

М. О. Катанаев Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 2

<http://www.mathnet.ru/links/308446cb279f9352012e4a8468f2406f/lkn26.pdf>

М. О. Катанаев Математические основы общей теории относительности. Часть 1

<http://www.mathnet.ru/links/0ad2738fafc64fb0024fdca2b494a1a8/book1699.pdf>

М. О. Катанаев Математические основы общей теории относительности. Часть 2

<http://www.mathnet.ru/links/5a547795171174f5a34b57aeb3702eb8/lkn29.pdf>

:

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –

<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –

<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
- ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
- ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешанном формате («Актру»).

15. Информация о разработчиках

Горбунов Иван Владиславович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ, доцент.