

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Функциональный анализ

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Современная математика и математическое моделирование

Форма обучения
Очная

Квалификация
Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь

Год приема
2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– индивидуальные задания;

Примеры индивидуальных заданий:

Индивидуальное задание № 1(РООПК-1.1 и РООПК-1.3)

Сходится ли данная последовательность функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в каждом из пространств

$C[0, 1]$, $L_1(0, 1)$ и $L_2(0, 1)$? Если сходится, то найдите предельную функцию.

$$1a) x_n(t) = \sin \frac{(n-1)t}{n};$$

$$1б) x_n(t) = \frac{t^2 + n}{t^2 + n^2 + 1}.$$

$$2a) x_n(t) = n \sin \frac{t}{n};$$

$$2б) x_n(t) = \frac{n}{nt + 1}.$$

$$3a) x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{n}}} + \sin \frac{t}{n};$$

$$3б) x_n(t) = t^{n+\sqrt{n}} - t^n.$$

4a) $x_n(t) = e^{-t/\sqrt{n}};$	4б) $x_n(t) = \frac{n^2 t^2}{n^4 t^4 + 1}.$
5a) $x_n(t) = \frac{\ln(t^2 + n^2)}{n};$	5б) $x_n(t) = \frac{n^2 t}{n^4 t^4 + 1}.$
6a) $x_n(t) = \frac{\ln(nt + 1)}{n};$	6б) $x_n(t) = \frac{nt}{n^3 t^3 + 1}.$
7a) $x_n(t) = \frac{\ln(t + n)}{\ln(t + 2n)};$	7б) $x_n(t) = \frac{t + n}{n^2 t^2 + 1}.$
8a) $x_n(t) = \frac{\ln(nt + n^2)}{t + n^2};$	8б) $x_n(t) = \frac{t^2 + n^2}{n^2 t^2 + 1}.$
9a) $x_n(t) = n \operatorname{tg} \frac{t}{n};$	9б) $x_n(t) = \frac{t + n}{t + n + 1}.$
10a) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{t+n}};$	10б) $x_n(t) = \sqrt{\frac{t}{n} + 1} - \frac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{n}}}.$

Индивидуальное задание № 2(РООПК-1.1 и РООПК-1.2)

Является ли данный функционал ограниченным на каждом из пространств c_0 , и l_2 ? В случае ограниченности найдите его норму.

1a) $f(x) = \sum_{n=1}^{10} n x_n;$	1б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n+1}.$
2a) $f(x) = \sum_{n=1}^{100} (-1)^n x_n;$	2б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n} x_n.$
3a) $f(x) = \sum_{n=1}^{20} (1 - (-1)^n) x_n;$	3б) $f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x_n}{(n-2)(n+2)}.$
4a) $f(x) = \sum_{n=1}^{10} (-1)^n n x_n;$	4б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n+3}}.$
5a) $f(x) = x_1 + 4x_3 - 3x_4;$	5б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{\ln(n+1)}.$
6a) $f(x) = \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2};$	6б) $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{n \ln n}.$
7a) $f(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10};$	7б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n} \ln 2n}.$

Индивидуальное задание № 3 (РООПК-1.1 и РООПК-1.3)

Пусть $L \subset l_p^2$ — линейное одномерное подпространство и $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный функционал. Постройте его линейное продолжение $\tilde{f}: l_p^2 \rightarrow \mathbb{R}$ с сохранением нормы для $p = 1$, $p = 2$ и $p = \infty$.

$$1) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid y - x = 0\}, \quad f(x, y) = x + 2y.$$

$$2) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid y - 2x = 0\}, \quad f(x, y) = 5x + 5y.$$

$$3) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid x + y = 0\}, \quad f(x, y) = 4x - 2y.$$

$$4) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 2y + x = 0\}, \quad f(x, y) = 10y - 5x.$$

$$5) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 2y - x = 0\}, \quad f(x, y) = x - y.$$

$$6) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid y + 2x = 0\}, \quad f(x, y) = x.$$

$$7) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 3x + 4y = 0\}, \quad f(x, y) = 5x - 10y.$$

$$8) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 3x + y = 0\}, \quad f(x, y) = y - 2x.$$

$$9) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid x - 3y = 0\}, \quad f(x, y) = x + y.$$

$$10) L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 3x - y = 0\}, \quad f(x, y) = 3x + 2y.$$

Индивидуальное задание № 4 (РООПК-1.1 и РООПК-1.3)

Будет ли данная последовательность функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактной в пространстве $C[0, 1]$?

$$1a) x_n(t) = \sin \frac{(n-1)t}{n};$$

$$16) x_n(t) = \frac{t^2 + n}{t^2 + n^2 + 1}.$$

$$2a) x_n(t) = n \sin \frac{t}{n};$$

$$26) x_n(t) = \frac{n}{nt + 1}.$$

$$3a) x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{n}}} + \sin \frac{t}{n};$$

$$36) x_n(t) = t^{n+\sqrt{n}} - t^n.$$

$$4a) x_n(t) = e^{-t/\sqrt{n}};$$

$$46) x_n(t) = \frac{n^2 t^2}{n^4 t^4 + 1}.$$

$$5a) x_n(t) = \frac{\ln(t^2 + n^2)}{n};$$

$$56) x_n(t) = \frac{n^2 t}{n^4 t^4 + 1}.$$

$$6a) x_n(t) = \frac{\ln(nt + 1)}{n};$$

$$66) x_n(t) = \frac{nt}{n^3 t^3 + 1}.$$

$$7a) x_n(t) = \frac{\ln(t + n)}{\ln(t + 2n)};$$

$$76) x_n(t) = \frac{t + n}{n^2 t^2 + 1}.$$

Индивидуальное задание № 5 (РООПК-1.1 и РООПК-1.2)

Пусть T — оператор, действующий а) из $\mathbb{C}^4$ в $\mathbb{C}^4$; б) из l_2 в l_2 ; в) из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$.

Найдите сопряженный оператор T^* .

- 1а) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4 - x_1, 0, x_2, x_3 + x_4)$;
- 1б) $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + x_{11}, x_2 + x_{13}, x_3 + x_{15}, x_4 + x_{17}, \dots)$;
- 1в) $Tx(t) = \int_0^1 t x(s^2) ds$.
- 2а) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - x_4, x_3 + x_4, x_2 + x_3, x_2 - x_3)$.
- 2б) $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + x_2 + \dots + x_{10}, x_2, x_3, x_4, \dots)$;
- 2в) $Tx(t) = \int_0^1 \sqrt{t} x(\sqrt{s}) ds$.
- 3а) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4 - x_1)$.
- 3б) $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_3, x_3, x_5, x_5, x_7, x_7, \dots)$;
- 3в) $Tx(t) = \int_0^1 t^{1/3} x(s^2) ds$.
- 4а) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4, x_2 + x_3, x_3 - x_1, x_1 + x_4)$.
- 4б) $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_2, x_1, x_5, x_6, x_6, x_5, \dots)$;
- 4в) $Tx(t) = \int_0^1 t x(\sqrt{s}) ds$.
- 5а) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$.
- 5б) $T(x_1, x_2, \dots) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5, \dots)$;
- 5в) $Tx(t) = \int_0^1 \sqrt{t} x(s^2) ds$.
- 6а) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_2 + x_3, x_3 - x_2, x_3)$.
- 6б) $T(x_1, x_2, \dots) = (-x_1, x_2, -x_3, x_4, \dots)$;
- 6в) $Tx(t) = \int_0^t s x(s) ds$.

Индивидуальное задание № 6 (РООПК-1.1 и РООПК-1.2)

Пусть $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ — линейный оператор. Найдите все собственные числа и соответствующие им собственные векторы оператора T .

- 1) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4 - x_1, 0, x_2, x_3 + x_4)$.
- 2) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - x_4, x_3 + x_4, x_2 + x_3, x_2 - x_3)$.
- 3) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4 - x_1)$.
- 4) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4, x_2 + x_3, x_3 - x_1, x_1 + x_4)$.
- 5) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$.
- 6) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_2 + x_3, x_3 - x_2, x_3)$.
- 7) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_2, x_1)$.
- 8) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 0, x_2 + x_3 + x_4, x_2 - x_3)$.
- 9) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_2, x_1 + x_2, x_3 - x_2, x_4 - x_3)$.
- 10) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_2 + x_3, 0, x_1 + x_4)$.

Индивидуальное задание № 7 (РООПК-1.1 и РООПК-1.2)

Спектр оператора Фредгольма с вырожденным ядром

$$1a) Tx(t) = \int_0^{\pi} \sin(t+s) x(s) ds;$$

$$16) Tx(t) = \int_{-1}^1 ts(t+s) x(s) ds.$$

$$2a) Tx(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t-s) x(s) ds;$$

$$26) Tx(t) = \int_{-1}^1 ts(1+ts) x(s) ds.$$

$$3a) Tx(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+s) x(s) ds;$$

$$36) Tx(t) = \int_{-1}^1 \frac{1+ts}{1+s^2} x(s) ds.$$

$$4a) Tx(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t+s) x(s) ds;$$

$$46) Tx(t) = \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{s}) x(s) ds.$$

$$5a) Tx(t) = \int_0^{\pi} \cos(t-s) x(s) ds;$$

$$56) Tx(t) = \int_{-1}^1 \left(t^2 + \frac{t+s}{2} \right) x(s) ds.$$

$$6a) Tx(t) = \int_0^{\pi/2} \cos(t-s) x(s) ds;$$

$$66) Tx(t) = \int_{-1}^1 ts(3-ts) x(s) ds.$$

$$7a) Tx(t) = \int_0^{\pi} \sin(t+2s) x(s) ds;$$

$$76) Tx(t) = \int_{-1}^1 ts(5ts-3) x(s) ds.$$

$$8a) Tx(t) = \int_0^{\pi} \sin(t-2s) x(s) ds;$$

$$86) Tx(t) = \int_0^1 \left(ts - \frac{1}{3} \right) x(s) ds.$$

$$9a) Tx(t) = \int_0^{\pi} \cos(t-2s) x(s) ds;$$

$$96) Tx(t) = \int_0^1 (t+s-2ts) x(s) ds.$$

$$10a) Tx(t) = \int_0^{\pi} \cos(t+2s) x(s) ds;$$

$$106) Tx(t) = \int_{-1}^1 s^2(s^2+5ts) x(s) ds.$$

Индивидуальное задание № 8 (РООПК-1.1 и РООПК-1.3)

Найдите спектр оператора Фредгольма $T: L_2(a, b) \rightarrow L_2(a, b)$, заданного формулой

$$Tx(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds.$$

$$1) [a, b] = [0, \pi] \text{ и } K(t, s) = \begin{cases} t, & \text{если } t \leq s, \\ s, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

$$2) [a, b] = [-\pi, 0] \text{ и } K(t, s) = \begin{cases} s, & \text{если } t \leq s, \\ t, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

$$3) [a, b] = [0, \pi/2] \text{ и } K(t, s) = \min\{t, s\}.$$

$$4) [a, b] = [-\pi/2, 0] \text{ и } K(t, s) = \max\{t, s\}.$$

$$5) [a, b] = [0, 1] \text{ и } K(t, s) = \begin{cases} t, & \text{если } t \leq s, \\ s, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

$$6) [a, b] = [-1, 0] \text{ и } K(t, s) = \begin{cases} s, & \text{если } t \leq s, \\ t, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

$$7) [a, b] = [-1, 1] \text{ и } K(t, s) = \begin{cases} (1+t) \cdot (1-s), & \text{если } t \leq s, \\ (1-t) \cdot (1+s), & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

$$8) [a, b] = [0, 1] \text{ и } K(t, s) = \begin{cases} \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch}(s-1), & \text{если } t \leq s, \\ \operatorname{sh} s \cdot \operatorname{ch}(t-1), & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

$$9) [a, b] = [0, 2] \text{ и } K(t, s) = \begin{cases} t \cdot (s-2), & \text{если } t \leq s, \\ s \cdot (t-2), & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

$$10) [a, b] = [-1, 0] \text{ и } K(t, s) = \begin{cases} s \cdot (t+1), & \text{если } t \leq s, \\ t \cdot (s+1), & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

Индивидуальное задание № 9 (РООПК-1.1 и РООПК-1.3)

Уравнения Фредгольма. Формулы Гильберта – Шмидта

Применяя формулы Гильберта – Шмидта, решите уравнение Фредгольма

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t, s) x(s) ds + f(t)$$

для каждого из данных значений μ .

	μ	$[a, b]$	$K(t, s)$	$f(t)$
1)	$\{1, 1/4, 9/4\}$	$[0, \pi]$	$\begin{cases} t, & \text{если } t \leq s, \\ s, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$	$\sin 2t \cdot \cos \frac{t}{2}$
2)	$\{2, -1/4, -25/4\}$	$[-\pi, 0]$	$\begin{cases} s, & \text{если } t \leq s, \\ t, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$	$\sin \frac{t}{2}$
3)	$\{1, 4, 9\}$	$[0, \pi/2]$	$\min\{t, s\}$	$\sin 3t$

4)	$\{1, -1, -25\}$	$[-\pi/2, 0]$	$\max\{t, s\}$	$\sin 2t \cdot \cos t$
5)	$\{\pi^2, \pi^2/4, 25\pi^2/4\}$	$[0, 1]$	$\begin{cases} t, & \text{если } t \leq s, \\ s, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$	$\sin \frac{5\pi t}{2}$
6)	$\{\pi/4, -\pi^2/4, -9\pi^2/4\}$	$[-1, 0]$	$\begin{cases} s, & \text{если } t \leq s, \\ t, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$	$\sin \frac{\pi t}{2}$
7)	$\{1, \pi^2/8, 2\pi^2\}$	$[-1, 1]$	$\begin{cases} (1+t) \cdot (1-s), & \text{если } t \leq s, \\ (1-t) \cdot (1+s), & \text{если } t \geq s. \end{cases}$	$\sin 2\pi t$
8)	$\left\{ \frac{1}{4 \operatorname{ch} 1}, \frac{\pi^2 + 4}{4 \operatorname{ch} 1}, \frac{9\pi^2 + 4}{4 \operatorname{ch} 1} \right\}$	$[0, 1]$	$\begin{cases} \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch}(s-1), & \text{если } t \leq s, \\ \operatorname{sh} s \cdot \operatorname{ch}(t-1), & \text{если } t \geq s. \end{cases}$	$\sin \frac{3\pi t}{2}$
9)	$\{\pi^2/8, -\pi^2/8, -\pi^2/2\}$	$[0, 2]$	$\begin{cases} t \cdot (s-2), & \text{если } t \leq s, \\ s \cdot (t-2), & \text{если } t \geq s. \end{cases}$	$\sin \pi t \cdot \cos^2 \pi t$
10)	$\{4\pi^2, -4\pi^2, -9\pi^2\}$	$[-1, 0]$	$\begin{cases} s \cdot (t+1), & \text{если } t \leq s, \\ t \cdot (s+1), & \text{если } t \geq s. \end{cases}$	$\sin 2\pi t$

Индивидуальное задание № 10 (РООПК-1.1 и РООПК-1.3)

Исследовать последовательность функций на сходимость по мере, почти всюду, равномерную и почти равномерную на промежутках $(0, +\infty)$ и $[0, 1]$.

1. $x_n(t) = \frac{2nt}{t^2 + n^2}$;
2. $x_n(t) = e^{-|t-n|}$;
3. $x_n(t) = e^{-(nt-1)^2}$;
4. $x_n(t) = \operatorname{arctg} \frac{t}{n}$;
5. $x_n(t) = e^{t^2 - n^2}$;
6. $x_n(t) = \begin{cases} t, & t \in [-n, n] \\ -n, & t \in (-\infty; -n) \text{ а) } t \in [-1; 1], \text{ б) } t \in (-\infty; +\infty) \\ n, & t \in (n; +\infty) \end{cases}$
7. $x_n(t) = \frac{1}{n} \chi_{[n, n+\sqrt{n}]}$ а) $t \in [-1; 1]$, б) $t \in (-\infty; +\infty)$
8. $x_n(t) = \sqrt{n} \chi_{[n, n+\frac{1}{n}]}$ а) $t \in [-1; 1]$, б) $t \in (-\infty; +\infty)$
9. $x_n(t) = n \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$ а) $t \in [-1; 1]$, б) $t \in (-\infty; +\infty)$
10. а) $t \in [-1; 1]$, б) $t \in (-\infty; +\infty)$
 $x_n(t) = e^{\frac{1}{nt+1}}$;

Критерии оценивания: индивидуальное задание считается выполненным, если получен верный ответ, возможно допустить вычислительные ошибки. Критерии оценивания индивидуального задания: индивидуальное задание считается выполненным, если оно решено полностью верно, возможно с помощью преподавателя.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из трех частей.

Первая часть и вторая часть представляет собой теоретические вопросы, проверяющие ИОПК 1.1 и ИОПК 1.3. Ответы на вопросы первой части даются путем выбора из списка предложенных.

Третья часть содержит практическое задание, проверяющее ИОПК 1.2. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Перечень теоретических вопросов (первый семестр):

1. Определение нормированного пространства. Свойства нормы. Примеры нормированных пространств.
2. Неравенства Гёльдера и Минковского.
3. Определение линейного оператора. Свойства. Теорема о равносильности ограниченности и непрерывности линейного оператора.
4. Примеры ограниченных и неограниченных линейных операторов. Непрерывность оператора Фредгольма.
5. Пространство линейных операторов. Его полнота.
6. Теорема Бэра. Принцип равномерной ограниченности.
7. Изоморфизмы и изометрии. Изоморфизм всех конечномерных пространств одной размерности. Следствия.
8. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
9. Естественная изометрия. Свойства. Признак ограниченности множества.
10. Сопряженные операторы. Свойства.
11. Линейные ограниченные функционалы. Примеры ограниченных и неограниченных линейных функционалов. Связь с гиперплоскостями.
12. Общий вид функционалов в пространствах l_∞ , l_p $p \geq 1$, c_0 .
13. Теорема Хана-Банаха. Аналитическая форма.
14. Теорема Хана-Банаха для нормированных пространств.
15. Следствия из теоремы Хана-Банаха.
16. Функционал Минковского и его свойства.
17. Геометрическая форма теоремы Хана-Банаха.
18. Вполне непрерывные операторы. Теорема о сумме и предельном переходе. Свойства. Примеры. Вполне непрерывность оператора Фредгольма в $C[a, b]$.
19. Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром в пространстве $L_2[a, b]$.
20. Теорема Хаусдорфа.
21. Теорема Арцела-Асколи.
22. Выпуклые множества и их свойства.

23. Принцип открытости отображения. Теорема Банаха об обратном операторе.
24. График линейного оператора. Его свойства. Теорема о замкнутом графике.
25. Конечномерные операторы. Теорема об общем виде конечномерного оператора.
26. Гильбертовы пространства. Примеры. Свойства.
27. Теорема о наилучшем приближении. Теорема о проекции. Следствия.
28. Ортонормированные системы. Примеры. Теореме Пифагора. Метод ортогонализации Шмидта.
29. Общий вид функционала в гильбертовом пространстве.
30. Ряды Фурье. Экстремальное свойство многочлена Фурье. Неравенство Бесселя.
31. Полные и замкнутые ортонормированные системы. Сходимость ряда Фурье.
32. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Примеры. Свойства. Теорема о существовании оператора T^* .
33. Самосопряженные операторы. Теорема о норме. Свойства.
34. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве. Вполне непрерывность оператора T^* . Теорема об аппроксимации.
35. Конечномерные операторы в гильбертовом пространстве.
36. Изоморфизм всех бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.
37. Теорема Стоуна-Вейерштрасса для вещественного и комплексного случая.

Перечень теоретических вопросов (второй семестр):

Вопросы к экзамену:

1. Определение и свойства спектра.
2. Теорема о непустоте спектра.
3. Связь между спектрами оператора T и T^* .
4. Вещественный спектр самосопряженного оператора.
5. Спектр вполне непрерывного оператора. Теорема 1 и Теорема 2.
6. Теорема о замкнутости образа оператора $\lambda I - T$, где T – вполне непрерывный оператор.
7. Теорема $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$, где T – вполне непрерывный оператор.
8. Теорема о строении спектра вполне непрерывного оператора.
9. Уравнение Рисса-Шаудера. Теорема Фредгольма.
10. Теорема о неподвижной точке. Уравнение Вольтерра.
11. Теорема о полиномиальном отображении спектра.
12. Функции ограниченной вариации. Свойства. Теорема Жордана. Непрерывность функции $V(t)$.
13. Интеграл Стильбеса. Свойства, Примеры. Интегрируемость непрерывных функций.
14. Общий вид функционала на $C[a,b]$.
15. Определение полукольца, кольца. алгебры. Кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{E})$.
16. Мера на кольце $\mathcal{R}(\mathcal{E})$. Свойства меры на кольце.
17. Теорема Лебега о продолжении меры.
18. Свойства меры μ^* .
19. Сходимость последовательностей измеримых функций.
20. Теорема Егорова.
21. Теорема Лузина.
22. Меры на прямой. Счётная аддитивность меры.

23. Регулярные меры.
24. Обобщённые меры. Теорема Хана. теорема Жордана.
25. Абсолютно непрерывные меры. Теорема Радона-Никодима.
26. Разложение меры в смысле Лебега.
27. Абсолютно непрерывные функции. Равносильные определения. Связь с абсолютно непрерывными мерами.

Примеры задач:

Задача № 1

Пусть $T: l_2 \rightarrow l_2$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, 0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Найдите T^* .

Задача № 2

Найдите скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ векторов $x = (i, -1, 3+i, 3)$ и $y = (i, -2, -i, i)$ в пространстве $\mathbb{C}^4$.

Задача № 3

Найдите все собственные векторы оператора $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_2, x_2)$.

Задача № 4

Найдите все собственные векторы оператора $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, x_3 + x_4, 0)$.

Задача № 5

Найдите все собственные векторы оператора $T: L_2(-1, 1) \rightarrow L_2(-1, 1)$, заданного формулой $Tx(t) = \int_{-1}^1 (1+ts)x(s)ds$.

Задача № 6

Найдите все собственные векторы оператора $T: L_2(-1, 1) \rightarrow L_2(-1, 1)$, заданного формулой $Tx(t) = \int_{-1}^1 (3ts + 5t^2s^2)x(s)ds$.

Задача № 7

Решить уравнение Фредгольма

$$x(t) = \int_{-1}^1 (3ts + 5t^2s^2)x(s)ds + t.$$

Задача № 8

Является ли вполне непрерывным оператор $Tx(t) = x(t^2)$ в пространстве $C[-1, 1]$.

Задача № 9

Будет ли ограниченным функционал $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$, если

а) $x \in l_1$;

б) $x \in l_2$.

Если функционал ограничен, то найдите его норму.

Задача № 10

Является ли вполне непрерывным оператор
 $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots, x_n, \dots)$ в пространстве c_0 .

Задача № 11

Найти спектр оператора:

$$1) T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4 - x_1, 0, x_2, x_3 + x_4).$$

Задача № 12

Найти спектр оператора:

$$Tx(t) = \int_0^{\pi} \sin(t-2s) x(s) ds;$$

Задача № 13

Найти спектр оператора:

$$T: C[-1,1] \rightarrow C[-1,1], \quad Tx(t) = x(0)t + x(1).$$

Задача № 14

Найти спектр оператора:

$$T: C[-1,1] \rightarrow C[-1,1], \quad Tx(t) = \sin \pi t \cdot x(t).$$

Задача № 15

При каких значениях параметра μ уравнение $x(t) = \mu \int_{-1}^1 (ts + t^2)x(s)ds + 1$ имеет единственное решение.

Задача № 16

При каких значениях параметра μ уравнение $x(t) = \mu \int_0^{\pi} \sin(2t+s)x(s)ds + \cos 2t$ имеет единственное решение.

Задача № 17

Исследовать последовательность функций на сходимость по мере, почти всюду, равномерную и почти равномерную на промежутках $(0, +\infty)$ и $[0,1]$

$$x_n(t) = \frac{n^2 t^2 + nt + 1}{n^2 t + 1}.$$

Задача № 18

Исследовать последовательность функций на сходимость по мере, почти всюду, равномерную и почти равномерную на промежутках $(0, +\infty)$ и $[0,1]$

$$x_n(t) = e^{-nt^2};$$

Задача № 19

Исследовать последовательность функций на сходимость по мере, почти всюду, равномерную и почти равномерную на промежутках $(0, +\infty)$ и $[0, 1]$

$$x_n(t) = |nt - 1| - |nt + 1|$$

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные и развернутые ответы на два вопроса и задача решена верно.

Оценка «хорошо» выставляется, если дан правильный ответ на вопросы, но доказательства содержат неточности или не полностью изложены. Задача решена правильно или ход решения правильный, но содержит вычислительную ошибку.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если в целом дан правильный ответ, но изложен поверхностно и с нарушением логики изложения. Задача решена правильно или ход решения правильный, но содержит вычислительную ошибку.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если ответ представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения. Студент плохо владеет основными понятиями и концепциями функционального анализа. Допущены существенные терминологические и фактические ошибки. Задача решена неправильно.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний представлены в виде тестов.

Вариант 1 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2)

1. Каким из нормированных пространств C_0 , C , l_1 , принадлежит данная последовательность?
 - a. $(n+1)^{-2} \sum_{n=1}^{\infty}$;
 - b. $\left\{ \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Найдите норму элемента $x = \cos t$ в пространстве $L_1(0, \pi)$.
 - a. 0.
 - b. 2.
 - c. 1.
3. Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n: -1, 1 \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C[-1, 1]$, где $\varphi_n(t) = t \cos^2 \frac{t}{n}$.
 - a. $h(t) \equiv 1$.
 - b. $h(t) = t$.
 - c. $h(t) = t^2$.
4. Сопряжённым к данному оператору, $T: l_2 \rightarrow l_2$,

- $T \ x_1, x_2, \dots, x_n, \dots = 0, 0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ является оператор:
- $S \ y_1, y_2, \dots, y_n, \dots = 0, 0, y_3, y_4, \dots, y_n, \dots$.
 - $S \ y_1, y_2, \dots, y_n, \dots = y_3, y_4, \dots, y_n, \dots$.
5. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:
- $x, y \in \mathbb{C}^4$. $x = (1, i, -1, 4)$, $y = (i, 1, 2, 1/2)$.
 - $x, y \in \ell_2$. $x = \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.
6. Какой из векторов является собственным вектором оператора $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T \ x_1, x_2, x_3, x_4 = x_4, x_1, x_2, x_3$.
- $(-2, 2, -2, 2)$.
 - $(1, 0, 1, 0)$.

Вариант 2 РООПК-1.1 и РООПК-1.2

- Каким из нормированных пространств c_0 , c , l_1 , принадлежит данная последовательность?
 - $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$;
 - $\left\{ \sin \frac{1}{n\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$.
- Найдите норму элемента $x = t^2 - t$ в пространстве $L_1(-1, 1)$.
 - 1.
 - 2/3.
 - 1/6.
- Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n: -1, 1 \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C[-1, 1]$, где $\varphi_n(t) = nt \arcsin \frac{t}{n}$.
 - $h(t) \equiv 1$.
 - $h(t) = t$.
 - $h(t) = t^2$.
- Сопряжённым к данному оператору, $T: l_2 \rightarrow l_2$,
 $T \ x_1, x_2, \dots, x_n, \dots = 0, 0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots$ является оператор:
 - $S \ y_1, y_2, \dots, y_n, \dots = y_3, y_4, \dots, y_{n+2}, 0, 0, \dots$.
 - $S \ y_1, y_2, \dots, y_n, \dots = 0, 0, y_3, y_4, \dots, y_{n+2}, 0, 0, \dots$.
- Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:
 - $x, y \in \mathbb{C}^4$. $x = (1, i, -3, 4)$, $y = (1, -i, 24, 18)$.
 - $x, y \in L_2(-1, 1)$. $x(t) = e^{t+1}$, $y(t) = t + 1$.
- Какой из векторов является собственным вектором оператора $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T \ x_1, x_2, x_3, x_4 = x_4, x_1, x_2, x_3$.
 - $(0, 0, i, 0)$.
 - $(1, 1, 0, 0)$.

Вариант 3 (РООПК-1.1 и РООПК-1.2)

1. Каким из нормированных пространств c_0 , c , l_1 , принадлежит данная последовательность?
 - a. $\left\{ \frac{\arctg n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$;
 - b. $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Найдите норму элемента $x = |t| - 1/2$ в пространстве $L_1(-1,1)$.
 - a. 1.
 - b. 0.
 - c. 1/2.
3. Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n: -1,1 \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C[-1,1]$, где $\varphi_n(t) = t \cos \frac{t}{n}$.
 - a. $h(t) \equiv 1$.
 - b. $h(t) = t$.
 - c. $h(t) = t^2$.
4. Сопряжённым к данному оператору, $T: l_2 \rightarrow l_2$,
 $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, \dots, 0, x_n, \dots)$ является оператор:
 - a. $S(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (y_2, y_4, \dots, y_{2n}, \dots)$.
 - b. $S(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (y_2, 0, y_4, 0, \dots, y_{2n}, 0, \dots)$.
5. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:
 - a. $x, y \in \mathbb{C}^4$. $x = (1, i, 14, 7)$, $y = (i, -1, 4, -8)$.
 - b. $x, y \in L_2(-1,1)$. $x(t) = \sqrt{3}t - i$, $y(t) = \sqrt{3}t + i$.
6. Какой из векторов является собственным вектором оператора $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_3, x_2, x_4)$.
 - a. $(1, 3, -3, 0)$.
 - b. $(0, -i, i, 0)$.

Вариант 4 (РООПК-1.1 и РООПК-1.2)

1. Каким из нормированных пространств c_0 , c , l_1 , принадлежит данная последовательность?
 - a. $\left\{ n \sin \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$;
 - b. $\left\{ \frac{n^2}{n^4 + 1} \right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Найдите норму элемента $x = 3t - 1$ в пространстве $L_1(-1,1)$.
 - a. 10/3.
 - b. -2.
 - c. 2.

3. Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n: -1, 1 \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C[-1, 1]$, где $\varphi_n(t) = \left| 1 - t^3 \ln \frac{n+1}{n} \right|$.
- $h(t) \equiv 1$.
 - $h(t) = t$.
 - $h(t) = t^2$.
4. Сопряжённым к данному оператору, $T: L_2(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi)$, $Tx(t) = \int_0^\pi e^{ts} x(s) ds$ является оператор:
- $Sy(t) = \int_0^\pi e^{-its} y(s) ds$.
 - $Sy(t) = \int_0^\pi e^{ts} y(s) ds$.
5. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:
- $x, y \in \ell_2$. $x = \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \right\}_{n=1}^\infty$, $y = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^\infty$.
 - $x, y \in \mathbb{C}^4$. $x = (1-i, i, 12, -16)$, $y = (1-i, -2i, 12, 9)$.
6. Какой из векторов является собственным вектором оператора $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_2, 4x_1, x_1)$.
- $(0, -i, 0, 0)$.
 - $(1, i, 4, 1)$.

Вариант 5 (РООПК-1.1 и РООПК-1.2)

1. Каким из нормированных пространств c_0 , c , l_1 , принадлежит данная последовательность?
- $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^\infty$;
 - $\left\{ \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^\infty$.
2. Найдите норму элемента $x = t^3 - 1$ в пространстве $L_1(0, 2)$.
- 4.
 - 6.
 - 7/2.
3. Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n: -1, 1 \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C[-1, 1]$, где $\varphi_n(t) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - te^{-n} \right)$.
- $h(t) \equiv 1$.
 - $h(t) = t$.
 - $h(t) = t^2$.
4. Сопряжённым к данному оператору, $T: l_2 \rightarrow l_2$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 0, x_3, \dots, 0, x_{2n-1}, \dots)$ является оператор:

- a. $S \ y_1, y_2, \dots, y_n, \dots = y_2, 0, y_4, 0, \dots, y_{2n}, 0, \dots$.
- b. $S \ y_1, y_2, \dots, y_n, \dots = y_1, 0, y_3, 0, \dots, y_{2n-1}, 0, \dots$.
5. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:
- a. $x, y \in \ell_2$. $x = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$.
- b. $x, y \in \mathbb{C}^4$. $x = (1+i, i, 1, 2i)$, $y = (1-i, -3, i, 1)$.
6. Какой из векторов является собственным вектором оператора $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T \ x_1, x_2, x_3, x_4 = x_1 + x_3, 2x_2 + x_4, 0, 0$.
- a. $(-1, 2, 1, -4)$.
- b. $(0, 2i, 0, -i)$.

Ответы к тестам.

Вариант 1

1	2	3	4	5	6
a) c_0, c, l_1	b) c_0, c	b	b	b	a

Вариант 2

1	2	3	4	5	6
a) c_0, c	b) c_0, c, l_1	a	c	a	a

Вариант 3

1	2	3	4	5	6
a) c_0, c	b) c	c	b	a	b

Вариант 4

1	2	3	4	5	6
a) c	b) c_0, c, l_1	a	a	b	b

Вариант 5

1	2	3	4	5	6
a) c_0, c	b) c_0, c	c	a	b	b

Тест 6.

1. Найти спектр оператора $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$$

2. Найти спектр оператора $T: \mathcal{L}_2(0, \pi) \rightarrow \mathcal{L}_2(0, \pi)$

$$Tx(t) = \int_0^{\pi} \cos(t-s) x(s) ds;$$

3. Для всех значений параметра решить уравнение Фредгольма с вырожденным ядром

$$a) x(t) = \mu \int_0^{\pi} \cos(t-s) x(s) ds + \cos t;$$

4. Решить уравнение Фредгольма

$$x(t) = 2 \int_0^{\pi/2} K(t,s) x(s) ds + \cos 2t, \quad \text{где } K(t,s) = \begin{cases} \sin t \cdot \cos s, & \text{если } t \leq s, \\ \sin s \cdot \cos t, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

5. Исследовать последовательности функций на сходимость по мере, почти равномерную сходимость, поточечную сходимость и сходимость почти всюду.

$$x_n(t) = \frac{nt}{nt^2 + 1}.$$

a) $t \in [0;1]$, b) $t \in [1;+\infty)$

Тест 7.

1. Найти спектр оператора $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, 2x_1 - x_2 + x_3, 0, 0).$$

2. Найти спектр оператора $T: \mathcal{L}_2(0, \pi) \rightarrow \mathcal{L}_2(0, \pi)$

$$Tx(t) = \int_{-1}^1 \left(t^2 + \frac{t+s}{2} \right) x(s) ds.$$

3. Для всех значений параметра решить уравнение Фредгольма с вырожденным ядром

$$x(t) = \mu \int_0^{\pi} \cos(t-s) x(s) ds + \cos t;$$

4. Решить уравнение Фредгольма

$$x(t) + 2 \int_0^{\pi} K(t,s) x(s) ds = 1, \quad \text{где } K(t,s) = \begin{cases} s-t, & \text{если } t \leq s, \\ t-s, & \text{если } t \geq s. \end{cases}$$

5. Исследовать последовательности функций на сходимость по мере, почти равномерную сходимость, поточечную сходимость и сходимость почти всюду.

$$x_n(t) = \begin{cases} \cos(nt), & |t| \leq \frac{\pi}{n} \\ -1, & |t| > \frac{\pi}{n} \end{cases} \quad a) t \in [-1;1], \quad b) t \in (-\infty; +\infty)$$

Ответы к тесту 6.

1. $\sigma(T) = \{0, 2, 1+i, 1-i\}$

2. $\sigma(T) = \{0, \pi/2\}$

3.
$$x(t) = \begin{cases} (C+1)\sin t + C\cos t, \mu = \frac{2}{\pi}; \\ \frac{2}{(2+\mu\pi)}(\sin t - \cos t), \mu \neq \frac{2}{\pi}; \\ \emptyset, \mu = -\frac{2}{\pi}. \end{cases}$$

4.
$$x(t) = \frac{2\sin\sqrt{3}(t-\frac{\pi}{4})}{\sin\frac{\sqrt{3}\pi}{4}} + 3\cos 2t;$$

5. а) Равномерно не сходится, а поточечно, почти равномерно, по мере и почти всюду сходится;
 б) Равномерно не сходится, а поточечно, почти равномерно, по мере и почти всюду сходится;

Ответы к тесту 7.

1. $\sigma(T) = \{0, i, -i\};$

2. $\sigma(T) = \{0, 1, -\frac{1}{3}\};$

3.
$$x(t) = \begin{cases} \frac{2\cos t}{2-\mu\pi}; \mu \neq \frac{2}{\pi} \\ \emptyset, \mu = -\frac{2}{\pi}. \end{cases}$$

4. $x(t) = \cos 2t;$

5. а) Равномерно не сходится, а поточечно, почти равномерно, по мере и почти всюду сходится;
 б) Равномерно не сходится, а поточечно, почти равномерно, по мере и почти всюду сходится

Информация о разработчиках

Хмылева Татьяна Евгеньевна, к.-т физ.мат. наук, доцент, кафедра математического анализа и теории функций ММФ