

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Химический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

И.о. декана

А. С. Князев

Оценочные материалы по дисциплине

Математический анализ

по направлению подготовки

04.03.01 Химия

Направленность (профиль) подготовки:

Химия

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2024

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

В.В. Шелковников

Председатель УМК

В.В. Шелковников

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-3 Способен применять расчетно-теоретические методы для изучения свойств веществ и процессов с их участием с использованием современной вычислительной техники.

ОПК-4 Способен планировать работы химической направленности, обрабатывать и интерпретировать полученные результаты с использованием теоретических знаний и практических навыков решения математических и физических задач.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 3.1 Применяет теоретические и полуэмпирические модели при решении задач химической направленности.

ИОПК 3.2 Использует стандартное программное обеспечение при решении задач химической направленности.

ИОПК 4.1 Использует базовые знания в области математики и физики при планировании работ химической направленности.

ИОПК 4.2 Обрабатывает данные с использованием стандартных способов аппроксимации численных характеристик.

ИОПК 4.3 Интерпретирует результаты химических наблюдений с использованием физических законов и представлений.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- домашние задания в виде тестов в PLARIO;
- контрольная работа;
- опрос по теории;

Примеры тестов для домашней работы:

Тест (ИОПК 3.1, ИОПК-3.2., ИОПК-4.1., ИОПК-4.2., ИОПК-4.3)

- а) Найти скорость химической реакции в момент времени $t = 10$ сек, если концентрация исходного продукта меняется по закону $C(t) = -5e^{-0,2t}$.
- б) Если $C(t)$ – концентрация некоторого вещества, $v(t)$ – скорость химической реакции, t – время ее протекания, то данные переменные связаны соотношением:
- a. $C(t) = v'(t)$;
 - b. $v(t) = C'(t)$;
 - c. $C(t) = v(t)/t$;
 - d. $v(t) = C(t)/t$;
- в) Найти пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x + 1)$

2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + x^2}{x^2 + 5x + 6}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 8x}$

Ключи: 1) $1/e^2$; 2) b); 3.1) 6; 3.2) -2; 3.3) 1.

Критерии оценивания: тест считается пройденным, если обучающий ответил правильно как минимум на половину вопросов.

Тест по теме «Неопределенный интеграл»:

1) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1}dx$;

2) $\int x^2 \ln x dx$;

3) $\int \cos(8 - 5x) dx$

4) $\int \frac{(x+2)dx}{(x-1)x}$

5) $\int \sin(5 \ln x) \frac{dx}{x}$

Ключи: 1) $\frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$; 2) $(x^3 \ln(x))/3 - (x^3)/9 + C$; 3) $-\frac{1}{5} \sin(8 - 5x) + C$; 4) $3 \ln|x-1| - 2 \ln|x| + C$;
5) $-\cos(5 \ln(x))/5 + C$.

Задачи по теме «Определенный интеграл» (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2):

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной $y = e^x, y = e^{-x}, x=1$

2) Вычислить длину кривой: $y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

3) Исследовать на сходимость: $\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$;

Ключи: 1) $e + e^{-1} - 2$; 2) $0.5 \ln(3)$; 3) Сходится

Задачи по теме дифференциальные уравнения (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2):

1) Определить тип дифференциального уравнения первого порядка:

а) $y' = 3x^2 y - x^2$.

б) $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$.

в) $x dy - y dx = y dy$

Ключи: 1) С разделяющимися переменными, 2) Линейное неоднородное: 3) Однородное.

Тест по теме «Дифференциальные уравнения» (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2):

Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 2y' + y = 2e^x$

б) $yy' + y^2 = \cos x$

с) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$

д) $y'' - y' = 0$

Ключи: а) $y = e^x(C_1 + C_2 x + x^2)$; б) $y^2 = Ce^{-2x} + \frac{2}{5} \sin(x) + \frac{4}{5} \cos(x)$ с) $y = x \arcsin(Cx)$; д) $y = C_1 + C_2 e^x$;

Примеры контрольных работ

ВАРИАНТ №1

Контрольная работа по теме «Дифференциальное исчисление» (ИОПК 3.1, ИОПК-4.1.).

I. Найти производные следующих функций:

1. $y = (e^{\cos x} + 3)^2$; 2. $3^x + 3^y = x - y$;

II. Найти вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

III. Пользуясь правилом Лопиталя найти пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$

Ключи: I.1. $y' = -2(e^{\cos x} + 3)e^{\cos x} \sin(x)$; 2) Необходимо продифференцировать левую и правую часть уравнения по x и выразить из уравнения y' .

II. $y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$; III. 1. $1/2$; 2. 1 .

Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл и определенный интеграл» (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2)

ВАРИАНТ №1

1. Исследовать на сходимость: $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

2. Вычислить длину кривой: $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} t \in [0, \pi]$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

$$\rho = \sqrt{2 \sin \varphi}.$$

4. Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int x \sqrt{1-x^2} dx$; 2) $\int (3+5x) \sin 2x dx$

Ключи: 1. Сходится; 2. 20 ; 3. 2 ; 4. 1) $-\frac{(1-x^2)^{1.5}}{3} + C$; 4.2) $\frac{(5x-3)\cos 2x}{2} - \frac{5\sin 2x}{4} + C$

Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка» (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2, ИОПК-4.1., ИОПК-4.2).

Вариант №1

Найти общее решение или общий интеграл дифференциальных уравнений:

- 1) $y' \sin^2 x = y \ln y$;
- 2) $(x + 2y)dx = xdy$;
- 3) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;
- 4) $xy' - 3y = -x^4 y^2$;

Ключи: 1) $\ln|\ln y| = -\operatorname{ctg} x + C$; 2) $y = x(Cx - 1)$; 3) $y = (x + C)(x^2 + 1)$; 4) $y = \frac{7}{(C/x^7 + 1)x^4}$.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если решено верно более 70 процентов задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если решено более половины задач, но менее 70 процентов.

Во всех остальных случаях ставится оценка «неудовлетворительно».

Примеры устных вопросов по теории:

- 1) Условия применения правила Лопиталя.
- 2) Сформулируйте признак Даламбера для знакоположительных числовых рядов.

Ответы на теоретические вопросы оцениваются на экзамене.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из двух частей.

Первая часть представляет собой 2 теоретических вопроса, один из которых на знание определений, а второй на доказательство теоремы, которые проверяют ИОПК-4.1., ИОПК-4.3. Ответы на вопросы первой части даются письменно с устной защитой.

Вторая часть содержит три задачи в первом семестре и во втором и две задачи в третьем семестре, проверяющие ИОПК-3.1, ИОПК-3.2, ИОПК-4.2. Ответ на вопрос второй части дается письменно.

Вторая часть выполняется студентом на экзамене в том случае, если во время семестра контрольная по какой-либо из тем написана на оценку «неудовлетворительно». В этом случае студент получает 1 задачу по этой теме. На решение каждой задачи выделяется 20 минут. Задачи второй части берутся аналогичные тем, которые представлены в примерах контрольных работ и тестов для домашней работы.

Пример экзаменационного билета (первый семестр):

1. Понятие непрерывности функции в точке
2. Необходимое условие существования экстремума функции.
3. Вычислить предел, не используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + 2\ln(x))}{\ln(1 + 4\ln(x))}$$

4. Вычислить производную функции $y = x + \frac{\ln x}{x}$
5. Вычислить предел с помощью Правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \ln(1 + 2x)}{x^2}$

Пример экзаменационного билета (второй семестр):

1. Понятие первообразной функций
2. Геометрический смысл определённого интеграла с выводом.
3. Вычислить неопределённый интеграл: $\int (3 + 5x) \sin 2x dx$
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной $y = e^x, y = e^{-x}, x=1$
5. Найти все частные производные первого порядка функции $z = x \cos(xy)$.

Пример экзаменационного билета (третий семестр):

1. Понятие общего решения дифференциального уравнения первого порядка.
2. Теорема о структуре линейного однородного уравнения высших порядков.
Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений:
3. $y' \sin^2 x = y \ln y$;
4. $y'' - 2y' + y = 2e^x$

Примерный перечень теоретических вопросов (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2., ИОПК-4.1, ИОПК-4.2, ИОПК-4.3)

1 семестр.

- 1) Множества. Операции над множествами.
- 2) Функции и их свойства. Способы задания функций.
- 3) Основные элементарные функции, их графики и простейшие свойства.
- 4) Многочлены и их простейшие свойства.
- 5) Последовательность и ее предел. Основные теоремы о сходящихся числовых последовательностях. Операции над сходящимися числовыми последовательностями.
- 6) Предел функции, свойства пределов функции. Первый замечательный предел.
- 7) Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые (примеры).
- 8) Непрерывность функции. Определение и свойства.
- 9) Односторонние пределы. Классификация точек разрыва. Примеры.
- 10) Дифференцируемость функции в точке. Связь понятий производной и дифференциала функции.
- 11) Геометрический и механический смысл производной. Связь между непрерывными и дифференцируемыми функциями.
- 12) Правила дифференцирования явно заданных функций (с доказательством). Производная обратной функции.
- 13) Производные степенной, показательной и логарифмической функции (с выводом).
- 14) Производные тригонометрических функций (с выводом).
- 15) Производные обратных тригонометрических функций (с выводом).
- 16) Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.
- 17) Производные и дифференциалы высших порядков явно заданных функций. Формула Лейбница.
- 18) Правило Лопиталя. Примеры.
- 19) Формула Тейлора для функций одного аргумента. Табличные разложения.

- 20) Исследование функций на экстремум. Необходимое и достаточное условие существования экстремума.
- 21) Промежутки монотонности функции. Задача отыскания наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
- 22) Выпуклость функции. Точки перегиба.
- 23) Асимптоты графика. Вывод формул для параметров уравнения наклонных асимптот.
- 24) Схема полного исследования функции с пояснением по каждому пункту.
- 25) Определение первообразной и ее свойства. Неопределенный интеграл. Геометрическая интерпретация.
- 26) Свойства неопределенного интеграла с доказательством. Таблица интегралов.
- 27) Независимость неопределенного интеграла от выбора аргумента. Пример на использование данного свойства
- 28) Непосредственное интегрирование и метод замены переменной.
- 29) Формула интегрирования по частям. Использование этой формулы на практике.
- 30) Интегрирование рациональных дробей.

2 семестр.

- 1) Функции многих переменных. Область определения ФМП, график, примеры.
- 2) Предел и непрерывность ФМП.
- 3) Частные производные ФМП. Геометрический смысл частных производных.
- 4) Дифференцируемость функции многих переменных. Полный дифференциал.
- 5) Производная сложной функции.
- 6) Вычисление производной неявно заданной функции с помощью частных производных.
- 7) Понятие определенного интеграла. Теорема о существовании определенного интеграла.
- 8) Свойства определенного интеграла с доказательством.
- 9) Связь между понятиями определенного и неопределенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
- 10) Геометрический смысл определенного интеграла. Методы вычисления определенных интегралов.
- 11) Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.
- 12) Вычисление длины дуги явно заданной кривой.
- 13) Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически и в полярной системе координат.
- 14) Несобственный интеграл первого рода. Признаки сравнения для несобственных интегралов первого рода в виде теорем.
- 15) Несобственный интеграл второго рода. Признаки сравнения для несобственных интегралов второго рода в виде теорем.
- 16) Определение двойного интеграла. Геометрический смысл двойного интеграла.
- 17) Физический смысл двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
- 18) Вычисление двойных интегралов.
- 19) Замена переменных в двойном интеграле в общем случае. Переход в полярную систему координат.
- 20) Определение: сходимость ряда, сумма ряда.
- 21) Необходимое условие сходимости ряда.
- 22) Обобщенный гармонический ряд. Доказательство сходимости/расходимости.
- 23) Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.
- 24) Признаки сравнения рядов.
- 25) Признаки Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.

- 26) Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.
- 27) Абсолютная и условная сходимость.
- 28) Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
- 29) Теорема Лейбница.
- 30) Кратные интегралы и их приложения.

3 семестр.

- 1. Тригонометрический ряд Фурье для функции с периодом 2π .
- 2. Тригонометрический ряд Фурье для функций с периодом $2L$.
- 3. Тригонометрический ряд Фурье для чётной и нечётной функций.
- 4. Ряд Фурье в комплексной форме.
- 5. Степенной ряд. Область сходимости. Теорема Абеля.
- 6. Ряды Тейлора и Маклорена.
- 7. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена. Радиусы сходимости.
- 8. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятия решения, интегральной кривой, семейства кривых, задачи Коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Формулировки теорем существования и единственности. Примеры.
- 9. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
- 10. Дифференциальные уравнения, интегрируемые с помощью интегрирующего множителя.
- 11. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.
- 12. Дифференциальные уравнения, не разрешённые относительно производной.
- 13. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения.
- 14. Уравнение Бернулли.
- 15. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
- 16. Дифференциальные уравнения высших порядков. Методы понижения порядка.
- 17. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Свойства решений. Структура общего решения.
- 18. Определитель Вронского. Теорема о линейной независимости решений.
- 19. Линейные неоднородные уравнения. Структура общего решения.
- 20. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольной постоянной.
- 21. Линейные неоднородные уравнения. Метод вариации произвольной постоянной.
- 22. Линейная однородная система. Структура общего решения.

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы первой части, на теоретический вопрос второй части дан развернутый ответ и все задачи решены без ошибок либо средняя оценка за контрольные в семестре выше 4,5 баллов.

Оценка «хорошо» выставляется, если студент ответил на 2 вопроса из первой части верно, решил две задачи из третьей части и ответил полностью на второй вопрос с выводом, либо же выполнены полностью первая и третья часть экзамена, но отсутствует ответ на вторую часть.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент ответил хотя бы на один вопрос из трех вопросов первой части и решил 2 задачи из третьей части, либо в семестре получил среднюю оценку по контрольным работам выше 2,6 баллов.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполнены условия для оценки «удовлетворительно».

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Теоретические вопросы:

1. Для разрешения каких видов неопределенностей используется напрямую правило Лопиталя? (ИОПК 3.1, ИОПК-4.1.)
2. Дайте определение стационарной точки функции (ИОПК 3.1, ИОПК-4.1.)
3. Определение первообразной на отрезке (ИОПК 3.1, ИОПК-4.1.)
4. Понятие общего решения дифференциального уравнения первого порядка вида $y' = f(x, y)$ (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2, ИОПК-4.1., ИОПК-4.2.)
5. Формулировка признака Даламбера для знакоположительных рядов (ИОПК 3.1, ИОПК-4.1)

Ключи:

1. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$;
2. Стационарной точкой функции $f(x)$ называется такая точка из области определения данной функции, в которой производная этой функции равна нулю;
3. Первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется дифференцируемая на интервале (a, b) функция $F(x)$, такая, что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a, b)$;
4. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ в области D , называется функция $y = g(x, C)$, обладающая следующими свойствами:
 - 1) она является решением данного уравнения при любых допустимых значениях произвольной постоянной C ;
 - 2) Любое частное решение этого уравнения можно представить единственным образом в виде $y = g(x, C_0)$ при некотором $C = C_0$, которое подбирается из заданных начальных условий;
5. Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, и он меньше 1, то ряд сходится, если же этот предел больше 1, то ряд расходится.

Задачи

Задача 1 (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2, ИОПК 4.1., ИОПК-4.2, ИОПК 4.3)

Найти скорость химической реакции в момент времени $t = 10$ сек, если концентрация исходного продукта меняется по закону $C(t) = -10e^{-0,2t}$.

Задача 2 (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2)

Вычислить производную функции: $y = e^{x^2}$

Задача 3 (ИОПК 3.1, ИОПК 3.2)

Определить тип дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' \sin^2 x = y \ln y$$

Задача 4 (ИОПК 3.1, ИОПК-4.1.)

Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Ответы:

Задача 1. $2/e^2$;

Задача 2. $y' = 2xe^{x^2}$;

Задача 3. Уравнение с разделяющимися переменными;

Задача 4. $\frac{\ln^2(x)}{2} + C$.

Информация о разработчиках

Губин Владимир Николаевич, канд. физ.-мат. наук, кафедра системного анализа и математического моделирования Национального исследовательского Томского государственного университета, доцент.