

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:  
Директор  
А. В. Замятин

Рабочая программа дисциплины

**Дифференциальные и разностные уравнения**

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**Прикладная математика и инженерия цифровых проектов**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Бакалавр**

Год приема  
**2025**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
Д.Д. Даммер

Председатель УМК  
С.П. Сущенко

Томск – 2025

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4 Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2 Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3 Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4 Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

- Освоить аппарат теории дифференциальных и разностных уравнений.
- Научиться применять понятийный аппарат теории дифференциальных и разностных уравнений для решения практических задач профессиональной деятельности.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Дисциплина входит в модуль «Математика».

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Третий семестр, зачет

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования (Дискретная математика, Алгебра и геометрия, Математический анализ, Математическая логика и теория алгоритмов).

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 з.е., 72 часов, из которых:

-лекции: 24 ч.

-практические занятия: 16 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Краткое содержание темы. Дифференциальные уравнения (ДУ). Основные понятия. Определение дифференциального уравнения. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Порядок и степень дифференциального уравнения. Понятие решения дифференциального уравнения. Интегральная кривая, частное решение, общее решение, интеграл дифференциального уравнения. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения, разрешенные относительно производной. Поле направлений касательных. Изоклины. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные уравнения первого порядка. Неоднородные уравнения. Метод Лагранжа вариации постоянных. Метод Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения. Условия Липшица. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра и начальных условий. Теорема о дифференцируемости решений. Особые точки и особые решения ДУ.

Тема 2. Разностные уравнения и методы приближенного интегрирования ДУ.

Краткое содержание темы. Понятие полного метрического пространства. Фундаментальные последовательности. Принцип сжатых отображений. Теорема о неподвижной точке. Задача Коши. Метод последовательных приближений Пикара. Разностные схемы. Метод ломаных Эйлера. Недостатки метода ломаных и метода последовательных приближений. Метод Эйлера с уравниванием и метод Хьюна. Методы Рунге-Кутты. Общие и частные явные и неявные методы Рунге-Кутты. Порядок точности численных методов решения задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка. Схема метода Рунге-Кутты второго-третьего порядка точности. Схема метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Тема 3. Дифференциальные уравнения более высокого порядка.

Краткое содержание темы. Система ДУ. Каноническая (нормальная) форма системы ДУ. Векторное ДУ. Фазовое пространство, фазовые переменные, фазовая кривая, фазовая траектория, фазовый портрет ДУ. Динамическая система. Общий интеграл и частное решение векторного ДУ. Начальная задача (задача Коши), двухточечная краевая задача (ДТКЗ), многоточечные краевые задачи. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для векторного ДУ. Линейные векторные ДУ (системы линейных ДУ). Теоремы существования и единственности для линейных векторных ДУ. Линейно независимые системы решений. Определитель Вронского и его свойства. Фундаментальная система решений.

Тема 4. Линейные ДУ с постоянными коэффициентами.

Краткое содержание темы. Матричная экспонента. Собственные векторы и собственные числа матрицы коэффициентов. Представление общего решения системы однородных ДУ с постоянными коэффициентами через собственные векторы и собственные числа матрицы коэффициентов. Фундаментальная система решений.

Фундаментальная матрица. Представление решений однородной и неоднородной системы ДУ с постоянными коэффициентами через фундаментальную матрицу. Метод вариации постоянных. Теорема Лиувилля. Построение решения при различных корнях характеристического уравнения. Построение решения при наличии кратных корней характеристического уравнения.

#### Тема 5. Операционное исчисление.

Краткое содержание темы. Операционное исчисление Хевисайда. Оригиналы и изображения. Преобразование Лапласа. Основные формулы операционного исчисления (линейность преобразования Лапласа, изображение производных, теорема запаздывания). Теорема единственности. Интегрирование ДУ методами операционного исчисления.

#### Тема 6. Автономные (консервативные) системы.

Краткое содержание темы. Определение и свойства автономных систем. Точка покоя (равновесия). Возможные типы фазовых траекторий автономных систем. Примеры автономных систем: модели “хищник - жертва” (уравнение Лотки-Вольтерры, модифицированные уравнения Лотки-Вольтерры, уравнение Холлинга-Тэннера). Качественная теория автономных систем второго порядка. Линеаризация ДУ вблизи точки покоя. Поля скоростей и направлений исходных и линеаризованных уравнений. Точки покоя как особые точки. Их классификация (узел, фокус, центр, седловая точка) и свойства. Циклы. Точки бифуркации. Бифуркация рождения цикла (бифуркация Хопфа). Предельный цикл. Устойчивый и неустойчивый фокусы. Аттракторы и репеллеры.

#### Тема 7. Первые интегралы ДУ (законы сохранения).

Краткое содержание темы. Определение и свойства первых интегралов. Теоремы о первых интегралах. Производная в силу системы ДУ (производная по направлению векторного поля скоростей, производная Ли). Связь первых интегралов с фазовым портретом системы и законами сохранения на примере уравнений Лотки-Вольтерры и линеаризованных уравнений Холлинга-Тэннера.

#### Тема 8. Теория устойчивости.

Краткое содержание темы. Определение устойчивости по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Неустойчивость. Второй метод Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости. Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Устойчивость положения равновесия линейной однородной автономной системы. Теорема о необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости. Устойчивость нелинейных автономных систем по линейному приближению. Теоремы Ляпунова и Четаева об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица. Качественный анализ решений линейных (и линеаризованных) ДУ второго порядка по собственным числам матрицы коэффициентов (решениям характеристического уравнения).

### 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, тестов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр

### 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачёт в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет состоит из двух частей. Продолжительность экзамена 2 академических часа.

Первая часть содержит задание, проверяющее ИОПК-1.1, ИОПК-1.2 и ИОПК-1.3 по темам 1, 2, 3.

Вторая часть содержит задание, проверяющее ИОПК-1.1, ИОПК-1.2 и ИОПК-1.3 по темам 3, 4, 6.

Ответы на вопросы каждой части даются в развернутой форме и предполагают аналитическое решение предлагаемых задач с теоретическим обоснованием решений, а также программную реализацию и исследование решений на языке программирования MATLAB (или FreeMat) с представлением листинга программ и графических результатов.

Примерная форма вопросов зачётного задания:

**Задание 1.** Дано обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

- 1) Найти общее аналитическое решение ДУ, приведя в отчёте все промежуточные выкладки и пояснения.
- 2) Выделить из общего решения ДУ решение задачи Коши с начальным условием  $(x_0, y_0)$  и получить формулу, выражающую постоянную интегрирования  $C_0$  через  $x_0, y_0$ .
- 3) Задать численное значение начального условия  $(x_0, y_0)$  и границу  $x_{fin}$  интервала интегрирования.
- 4) Найти численное решение задачи Коши с использованием встроенной в Matlab (или FreeMat) процедуры ode45 интегрирования ДУ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка точности с заданной точностью  $1e-8$ .
- 5) Проверить правильность аналитического решения задачи Коши по невязке аналитического решения на численном решении (вывести невязку на график и объяснить, правильно ли получено аналитическое решение).
- 6) Вывести на графики интегральную кривую  $y(x)$  (в координатах  $(x, y)$ ) и фазовую траекторию (в координатах  $(y, f(x, y))$ ) решения задачи Коши, где  $f(x, y)$  – правая часть ДУ, разрешённого относительно производной.
- 7) Привести в отчёте листинг программы (в текстовом виде, чтобы его можно было скопировать и вставить в редактор системы программирования), скриншоты её исполнения и все полученные графики со всеми объяснениями.

**Задание 2.** Дана  $2 \times 2$ -матрица  $A$  коэффициентов системы линейных однородных дифференциальных уравнений.

- 1) Записать систему ДУ в векторно-матричной форме.
- 2) Составить систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений.
- 3) По матрице  $A$  построить характеристическое уравнение, исходя из его определения.
- 4) По виду характеристического уравнения построить ДУ второго порядка, эквивалентное системе ДУ.
- 5) Решить характеристическое уравнение и найти собственные числа матрицы  $A$ .
- 6) Построить общее аналитическое решение системы ДУ.
- 7) Определить тип тривиальной точки покоя системы.
- 8) Выделить из общего решения ДУ решение задачи Коши с начальным условием  $(x_0, y_0)$  и найти постоянные интегрирования в виде формул их зависимости от начальных условий.
- 9) Задать численное значение начального условия  $(x_0, y_0)$  и границу  $x_{fin}$  интервала интегрирования.
- 10) Найти численное решение задачи Коши с использованием встроенной в Matlab (FreeMat) процедуры ode45 интегрирования ДУ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка точности с заданной точностью  $1e-8$ .

- 11) Проверить правильность аналитического решения задачи Коши по невязке аналитического решения на численном решении (вывести невязки каждой компоненты решения на графики и объяснить, правильно ли получено аналитическое решение).
- 12) Вывести на графики интегральные кривые  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  (в координатах  $(x, y)$ ) и фазовую траекторию (в координатах  $(y_1, y_2)$ ) решения задачи Коши.
- 13) Привести в отчёте листинг программы (в текстовом виде, чтобы его можно было скопировать и вставить в редактор системы программирования), скриншоты её исполнения и все полученные графики со всеми объяснениями.

Результаты зачёта определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

**Зачтено.** Обучающийся показал творческое отношение к обучению, в овладел всеми теоретическими вопросами, показал все требуемые умения и навыки при решении задач или частично показал основные умения и навыки при решении задач. Все пункты задания выполнены правильно. Оценка зачтено также ставится при условии того, что обучающийся имеет недостаточно глубокие знания по теоретическим разделам дисциплины, показал не все основные умения и навыки при решении задач. Не все пункты задания выполнены правильно, ответы содержат ошибки и неточности.

**Незачтено.** Обучающийся имеет существенные пробелы по отдельным теоретическим разделам дисциплины и не владеет основными умениями и навыками при решении задач. Задания не выполнены или выполнены неправильно.

Текущий контроль влияет на промежуточную аттестацию с весом не более 40% при взвешенном усреднении оценок текущего контроля и промежуточной аттестации.

## 11. Учебно-методическое обеспечение

- а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «IDO» – <https://moodle.tsu.ru/mod/folder/view.php?id=317530>
- б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.
- в) План практических занятий по дисциплине.
- г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов («разбор полётов» по результатам выполнения домашних заданий).

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

- а) основная литература:
  - Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
  - Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
  - Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
  - Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию). – М.: Наука, ГИФМЛ, 1977. – 440 с.
- б) дополнительная литература:
  - Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Наука, ГИФМЛ, 1959. – 468 с.

- Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 244 с.
- Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.

в) ресурсы сети Интернет:

- Книги по математике – URL: <https://obuchalka.org/knigi-po-matematike/>
- Дьяконов В. Свободная матричная система FreeMat. // Компоненты и технологии, № 10 '2013, с. 116–122. – URL: <https://kit-e.ru/wp-content/uploads/147116.pdf>
- FreeMat Documentation Generated by Doxygen 1.8.1.1 Thu Jul 25 2013 17:18:37. – URL: <http://www.dsc.ufcg.edu.br/~icc/Periodo-2017.2/material/FreeMat-4.2.pdf>
- открытые онлайн-курсы.

### **13. Перечень информационных технологий**

а) свободно распространяемое программное обеспечение:

- FreeMat 4.2 для Windows 32/64 бит. – URL: <https://freesoft.ru/windows/freemat/versions/4-2-28251> или <https://sourceforge.net/projects/freemat/files/FreeMat4/>
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Виртуальные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате («Moodle»).

### **15. Информация о разработчиках**

Поддубный Василий Васильевич, доктор технических наук, профессор, ИПМиКТ ТГУ, профессор.