Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Численные методы оптимизации

по направлению подготовки
01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки:
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-7 Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 7.1 Владеет навыками использования основных языков программирования для решения задач науки и техники.

ИОПК 7.2 Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи, в том числе с применением современных вычислительных систем.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– выполнение индивидуальных заданий.

Примеры индивидуального задания (ИОПК 7.1):

Индивидуальное задание состоит из двух частей:

1). Решение задачи безусловной минимизации.

2). Решение задачи условной минимизации.

Целевую функцию исходной задачи исследовать на выпуклость. Обосновать сходимость численного решения соответствующего метода к решению задачи. Написать программу расчета задачи на языке C/C++ или Python. Представить отчет по проведенным исследованиям и полученным результатам расчета.

Вариант 1.

Для решения задачи одномерной минимизации использовать метод *дихотомического поиска* (с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-5}$).

1). Методами (с точностью $\varepsilon_2 = 10^{-4}$):

- *циклического покоординатного спуска;*
- *скорейшего спуска;*
- *сопряженных градиентов (вариант Флетчера – Ривза)*.

найти решение задачи безусловной минимизации:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 3x_1x_3 - 2x_2 + x_2x_3 - x_3 + x_1x_4 - x_4 - 2 \to \min$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$$

2). Найти решение задачи условной минимизации

$$2x_1^2 + x_2^2 + 4(x_2 - x_1) + 6 \to \min$$

$$\textit{при условии } x_1 + x_2 = 1$$

методом штрафных функций с точностью $\varepsilon_3 \approx 10^{-2}$.

Для выполнения численного этапа метода использовать метод безусловной минимизации (с точностью $\varepsilon_2 \approx 10^{-4}$)

- *сопряженных градиентов (вариант Флетчера – Ривза).*

Вариант 2.

Для решения задачи одномерной минимизации использовать метод *золотого сечения* (с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-5}$).

1). Методами (с точностью $\varepsilon_2 = 10^{-4}$):
- *Хука - Дживса;*
- *скорейшего спуска;*
- *Ньютона - Рафсона.*
найти решение задачи безусловной минимизации:

$$2x_1^{\ 2} + 3x_2^{\ 2} + 4x_3^{\ 2} - 2x_1x_2 - x_1 - 5x_2 + x_2x_3 - x_3 \to \min$$

$$(x_1\ , x_2, x_3) \in R^3$$

2). Найти решение задачи условной минимизации

$$3x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + 4x_2 + 6 \to \min$$

$$\textit{при условии } 2x_1 + x_2 \geq 3 \ .$$

методом штрафных функций с точностью $\varepsilon_3 \approx 10^{-2}$.
Для выполнения численного этапа метода использовать метод безусловной минимизации (с точностью $\varepsilon_2 \approx 10^{-4}$)
- *Ньютона - Рафсона.*

Ответы:
Вариант 1: 1) целевая функция строго выпукла, рассмотренные методы сходятся к стационарной точке: $x^* = (-0.321,\ 0.299,\ 0.208,\ 0.661), \quad f(x^*) = -2.733.$
2) целевая функция выпукла, метод штрафных функций сходится к решению: $x^* = (1.666,\ -0.667), \quad f(x^*) = 2.666.$

Вариант 2: 1) целевая функция сильно выпукла, рассмотренные методы сходятся к оптимальной точке $x^* = (0.801,\ 1.103,\ -0.013), \quad f(x^*) = -3.151.$
2) целевая функция выпукла, метод штрафных функций сходится к решению: $x^* = (1.428,\ 0.142), \quad f(x^*) = 12.712.$

Критерии оценивания текущей аттестации.

Результаты выполнения определяются оценками «зачтено», «не зачтено».
Оценка «зачтено», если разработана программа и получено правильное численное решение поставленной задачи.
Оценка «не зачтено», если нет программы решения или программа дает неправильные решения.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Итоговая аттестация состоит из двух частей.
1) Письменный отчет по выполненному индивидуальному заданию, проверяющий ИОПК 7.1.
2) Теоретическая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК 7.2 Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Примерный перечень теоретических вопросов (ИОПК 7.2)::

1. Постановка задачи оптимизации. Основные понятия. Классификация задач математического программирования.

2. Определение выпуклой, строго выпуклой, сильно выпуклой, строго квази выпуклой функций. Дифференциальные критерии выпуклости.
3. Экстремальные свойства выпуклых функций.
4. Определение минимизирующей последовательности, релаксационного процесса, метода спуска, вектора спуска. Общая схема методов спуска.
5. Основные понятия о численных методах оптимизации: сходимость метода, скорость сходимости методов оптимизации. Критерии остановки методов оптимизации для бесконечно-шаговых методов.

Результаты зачета определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Таблица. Система критериев итоговой аттестации

Критерии соответствия	Оценка
Получены правильные численные решения всех задач индивидуального задания. Содержание отчета являются полными. Студент полно, четко и логично излагает материал предлагаемого теоретического вопроса.	отлично
Получены правильные численные решения всех задач индивидуального задания. Содержание отчета и/или ответ на теоретический вопрос не является полным, но изложенная часть логически не противоречива и понятна. Демонстрирует умение понимать, доказательно и логически связно отвечать на вопросы.	хорошо
Получены правильные численные решения всех задач индивидуального задания. Содержание отчета и/или ответ на теоретический вопрос не является полным и его изложение носит поверхностный характер, логически противоречиво, но понятно.	удовлетворительно
Отчет вообще не подготовлен к защите. Неполный логически противоречивый недоказательный ответ или ответ отсутствует.	неудовлетворительно

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тесты (ИОПК 7.2):

1. *Определите к какому классу принадлежит функция в заданной области* $f(x)=x_1^3+x_2^2,\ x\in\{x_1\geq 0, x_2\geq 0\}$

а). строго выпуклая;
б). вогнутая;
в). выпуклая;
г). сильновогнутая;
д). сильновыпуклая;
е). не выпуклая и не вогнутая.

2. *«Точка* x^* *– строгое локальное решение задачи минимизации функции* $f(x)$, *заданной на множестве* $X\subseteq R^n$ *,если…»?*

а). $f(x)\leq f(x^*)$ *для* $\forall x\in X$;

б). $\exists\varepsilon>0$ *такое, что* $f(x)<f(x^*)$ *для* $\forall x\in X\bigcap\{x\in X : \|x-x^*\|\leq\varepsilon, x\neq x^*\}$;

в). $\exists\varepsilon>0$ *такое, что* $f(x)\leq f(x^*)$ *для* $\forall x\in X\bigcap\{x\in X : \|x-x^*\|\leq\varepsilon\}$;

г). $f(x)<f(x^*)$ *для* $\forall x\in X,\ x\neq x^*$.

Ключи: 1 в), 2 б).

Теоретические вопросы (ИОПК 7.2):

1. Общая схема методов спуска.
   Привести общую формулу методов спуска, дать определение вектора спуска и способы выбора этого вектора, способы выбора константы спуска.
2. Классификация задач математического программирования.
   Ответ должен содержать понятия целевой функции, допустимого множества, оптимального множества и критерии классификации.
3. Необходимые и достаточное условия оптимальности для дифференцируемой функции.
   Привести условия, которым должна удовлетворять оптимальная точка, и условия из которых следует, что полученная точка является оптимальной.
4. Метод сопряженных градиентов для квадратичной функции.
   Дать определение A-сопряженности системы векторов, привести схему метода.
5. Классификация численных методов оптимизации.
   Привести критерии, по которым производится классификации численных методов.

Информация о разработчиках

Лаева Валентина Ивановна, кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования ММФ ТГУ, старший преподаватель.