

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Факультет инновационных технологий

УТВЕРЖДЕНО:

Декан

С. В. Шидловский

Оценочные материалы по дисциплине

Основы теории и методы решения дифференциальных уравнений

по направлению подготовки / специальности

27.03.05 Инноватика

Направленность (профиль) подготовки:

Технологии проектирования и управления беспилотными авиационными системами

Форма обучения

Очная

Квалификация

Инженер/инженер-аналитик

Год приема

2024

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

С.В. Шидловский

Председатель УМК

О.В. Вусович

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы естественнонаучных и инженерных дисциплин, применять методы математического моделирования, теоретических и экспериментальных исследований.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ООПК 1.1 Знает фундаментальные законы естественнонаучных и инженерных дисциплин и математические законы

ООПК 1.2 Умеет применять законы естественнонаучных и инженерных дисциплин и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- тесты в среде электронного обучения iDO;
- контрольная работа.

Тест по разделу «Дифференциальные уравнения. Основные понятия. Полные дифференциалы» (ООПК-2.1, ООПК-2.2)

Примеры вопросов:

- 1) Найти решение дифференциального уравнения $y' = \sin(2x)$, $y(1) = 2$ в точке $x = 0.5$.
- 2) Найти решение дифференциального уравнения: $y' = x + \sin(2x)$, $y(1) = 11$ в точке $x = 2$.
- 3) Найти решение дифференциального уравнения: $y' = \exp(2 + x)$, $y(2) = 5$ в точке $x = 3.5$.

Ответы: 1) 1.522; 2) 12.619; 3) 40.419

Ответы вводятся вручную с округлением до трех значащих цифр после запятой. Каждая задача оценивается отдельно, максимальный балл за тест – 3 балла. Проходной балл – 2.

Тест по разделу «Линейное дифференциальное уравнение первого порядка» (ООПК-2.1, ООПК-2.2)

Примеры вопросов:

- 1) Решить дифференциальное уравнение: $xy' + y = x^3$ и записать ответ в случае начального условия $y(a) = b$ для значения аргумента $x = c$. Принять $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$.
- 2) Решить дифференциальное уравнение: $xy' + y = \ln x$ и записать ответ в случае начального условия $y(a) = b$ для значения аргумента $x = c$. Принять $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$.
- 3) Решить дифференциальное уравнение $xy' + y = \ln x + 3$ и записать ответ в случае начального условия $y(a) = b$ для значения аргумента $x = c$. Принять $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$.

Пояснение: следует сперва найти общее решение дифференциального уравнения; затем найти константу интегрирования из условия $y(a) = b$; далее, подставить $x = c$, ответ записать с точностью до второго знака после запятой.

Ответы: 1) 1.88; 2) 0.19; 3) 1.69.

Каждая задача оценивается отдельно, максимальный балл за тест – 3 балла. Проходной балл – 2.

Тест по разделу «Дифференциальные уравнения высших порядков» (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Примеры вопросов:

- 1) Решить дифференциальное уравнение с заданными граничными условиями $y'' + 2y' + y = \cos x - \sin x, y(0) = 1, y(1) = 3$. Записать значение полученной функции $y(x)$ в точке $x = 0.5$. Ответ записать с точностью до первого знака после запятой.
 - 2) Решить дифференциальное уравнение с заданными граничными условиями $y'' - 4y = e^x (x - 2), y(0) = 1, y(1) = 4$. Записать значение полученной функции $y(x)$ в точке $x = 0.5$. Ответ записать с точностью до первого знака после запятой.
 - 3) Решить дифференциальное уравнение с заданными граничными условиями. $y'' + 2y' - 3y = \exp(x), y(0) = 1, y(1) = 5$. Записать значение полученной функции $y(x)$ в точке $x = 0.5$. Ответ записать с точностью до первого знака после запятой.
- Ответы: 1) 2.6; 2) 1.8; 3) 2.6.

Каждая задача оценивается отдельно, максимальный балл за тест – 3 балла. Проходной балл – 2.

Тест по разделу «Дифференциальные уравнения высших порядков» (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Примеры вопросов:

- 1) Найти решение системы ДУ $x' = -5x + 4y, y' = -x - y$ с начальными условиями $x(0) = 1, y(0) = 0$, записать решение в точке $t = 1$, в качестве ответа указать значение суммы $x(1) + y(1)$. Точность записи – до второго знака после запятой.
Алгоритм решения:
 1. Решить систему ДУ. Найти зависимости $x = x(t, C_1, C_2), y = y(t, C_1, C_2)$.
 2. Подставить начальные условия, получить систему из двух алгебраических уравнений и определить значения констант C_1, C_2 .
 3. Подставить в выражения для x и y точку $t = 1$ и найти сумму получившихся x и y . Эту сумму указать в качестве ответа.
- 2) Найти решение системы ДУ и выбрать ответ из предложенных вариантов.

$$\begin{aligned} x' &= -5x - 2y - 2z, \\ y' &= 10x + 4y + 2z, \\ z' &= 2x + y + 3z. \end{aligned}$$
 - а)
$$\begin{aligned} x &= -C_1 e^t - C_3 e^{-t}, \\ y &= 4C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{-t}, \\ z &= -C_1 e^t - C_2 e^{2t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad x &= -C_1 e^t - C_2 e^{2t}, \\ y &= 4C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{-t}, \\ z &= -C_1 e^t - C_2 e^{2t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad x &= -C_1 e^t - C_2 e^t, \\ y &= 4C_1 e^t + C_2 e^t + 2C_3 e^{-t}, \\ z &= -C_1 e^t - C_2 e^t. \end{aligned}$$

3) Найти решение системы ДУ и выбрать ответ из предложенных вариантов.

$$x' = -5x - 6y,$$

$$y' = 8x + 9y.$$

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad x &= C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ y &= -\frac{4}{3} C_1 e^t - C_2 e^{3t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad x &= C_1 e^{3t} + C_2 e^t \\ y &= -\frac{4}{3} C_1 e^{3t} - C_2 e^t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad x &= 2C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ y &= -\frac{4}{3} C_1 e^t - C_2 e^{3t}. \end{aligned}$$

Ответы: 1) -0.1; 2) а; 3) б.

Каждая задача оценивается отдельно, максимальный балл за тест – 9 баллов.

Проходной балл – 6.

Контрольная работа №1 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Примеры задач:

1) Решить дифференциальное уравнение в полных дифференциалах:

$$xydx + (x+1)dy = 0$$

2) Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$x^2 y' + xy = -1$$

3) Решить дифференциальное уравнение высшего порядка

$$y^{(4)} + 50y'' + 625y = 0$$

Ответы:

$$1) ye^x = C(x+1), 2) yx = C - \ln x, 3) y(x) = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x + x(C_3 \cos 5x + C_4 \sin 5x)$$

Контрольная работа №2 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Примеры задач:

1) Решить неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 16x^2 e^{4x}.$$

2) Решить однородную систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -4x + 2y. \end{cases}$$

3) Решить неоднородную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = -4x + y + \frac{1}{te^t}. \end{cases}$$

Ответы:

- 1) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 (2x+1) - e^{4x}$,
- 2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,
- 3) $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + t e^{-t} (\ln|t| - 1), \\ y = C_1 (2t+1) e^{-t} + 2C_2 e^{-t} + e^{-t} (2t \ln|t| + \ln|t| - 2t). \end{cases}$

Результаты контрольных работ оцениваются по шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Каждая задача оценивается по пятибалльной шкале. Итоговая оценка определяется критериями:

Критерии оценки

Отлично	Ставится при условии набора более 12 баллов из возможных 15.
Хорошо	Ставится при условии набора не менее 12 баллов из возможных 15.
Удовлетворительно	Ставится при условии набора 9 - 12 баллов из возможных 15.
Неудовлетворительно	Ставится при наборе менее 9 баллов из возможных 15.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен проводится в устной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос и одну типовую задачу для проверки индикаторов РООПК-2.1, РООПК-2.2. Продолжительность экзамена 45 минут.

Примерный перечень теоретических вопросов

- 1) Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Частное решение, общее решение, особое решение, общий интеграл.
- 2) Уравнение в полных дифференциалах. Методы решения.
- 3) Интегрирующий множитель. Использование интегрирующего множителя для решения дифференциальных уравнений первого порядка.
- 4) Методы решения линейных уравнений первого порядка. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.
- 5) Методы решения линейных уравнений первого порядка. Метод Эйлера.
- 6) Методы решения линейных уравнений первого порядка. Уравнения неразрешенные относительно производной.
- 7) Методы решения линейных уравнений первого порядка. Уравнение Бернулли.
- 8) Методы решения линейных уравнений первого порядка. Уравнение Лагранжа и Клеро.
- 9) Методы решения линейных уравнений высшего порядка. Линейные однородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Понятие характеристического уравнения.
- 10) Методы решения линейных неоднородных ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.
- 11) Методы решения линейных неоднородных ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольной постоянной.
- 12) Методы решения линейных однородных ДУ высших порядков с переменными коэффициентами.
- 13) Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами. Метод исключения для решения систем дифференциальных уравнений.
- 14) Методы решения систем линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

15) Методы решения систем линейных неоднородных ДУ с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.

16) Методы решения систем линейных неоднородных ДУ с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.

17) Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

18) Построение интегрируемых комбинаций (метод Даламбера).

19) Задачи (из техники и природы), сводимые к дифференциальным уравнениям.

20) Краевые задачи и задачи с начальными условиями.

Примеры задач:

1. Дифференциальные уравнения первого и высшего порядка

1. $\operatorname{tg} y \, dx - \operatorname{ctg} x \, dy = 0$;

2. $y' = e^{x-y}$;

3. $y = (y')^4 - (y')^3 - 2$;

4. $y'' + y = \operatorname{ch} x$;

5. $y'' + y = 1 - \frac{1}{\sin x}$.

2. Системы дифференциальных уравнений

1. $x' = y, \quad y' = -x, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2. $x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x.$

3. $x' + 3x - y = 0, \quad y' - 8x + y = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 4.$

4. $x' + y = \cos t, \quad y' + x = \sin t.$

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценки «отлично» заслуживает обучающийся, показывающий всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умение свободно выполнять практические задания.

Оценки «хорошо» заслуживает обучающийся, показывающий полное знание учебного материала, допустившим незначительные погрешности при выполнении практических заданий.

Оценки «удовлетворительно» заслуживает обучающийся, показавший знания основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии; допустившим погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении практических заданий.

Оценивание производится с учетом данных о посещаемости занятий, результатов выполнения контрольных работ, работы в электронной-образовательной среде.

В случае, если студент выполнил контрольные работы на «удовлетворительно», посещаемость не превысила 60 % аудиторных занятий (практики и лекции), работа в обязательных элементах электронно-образовательной среды отсутствовала, преподаватель имеет право снизить оценку за экзамен на один балл.

Студенты, выполнившие все контрольные на «отлично», посетившие не менее 90 % аудиторных занятий и выполнившие на проходную оценку все элементы тестирования в электронной образовательной среде имеют возможность получить плюс один балл к

оценке, полученной в ходе ответа на экзамене, при условии, что практическое задание на экзамене решено без ошибок.

.4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Теоретические вопросы (РООПК-2.1):

- 1) Что такое характеристическое уравнение и как корни характеристического уравнения определяют вид решения дифференциального уравнения.
- 2) Перечислите методы решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
- 3) Опишите алгоритм решения неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка.
- 4) Укажите аналитические методы решения систем дифференциальных уравнений.

Задачи (РООПК-2.2):

- 1) $xy' + y = x \ln x$
- 2) $y' - y = x$
- 3) $\begin{cases} x' = -2x - 4y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$
- 4) $y'' - 5y' + 4y = 0$
- 5) $y'' + 3y' + 2y = 4 \cos x$

Ответы:

- 1) $y = \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}$
- 2) $y = -x - 1 + Ce^x$
- 3) $\begin{cases} x = (-C_1 + C_2) \sin 2t + (-C_1 + C_2) \cos 2t, \\ y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t. \end{cases}$
- 4) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^x$
- 5) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{\cos x}{2} + \frac{3 \sin x}{2}$

Информация о разработчиках

Моисеева Ксения Михайловна, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математической физики ФТФ ТГУ.