Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан ММФ
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Теория и вычислительная сложность алгоритмов

по направлению подготовки
01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки:
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-7 Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 7.1 Владеет навыками использования основных языков программирования для решения задач науки и техники.

ИОПК 7.2 Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи, в том числе с применением современных вычислительных систем.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

В течение семестра студент должен выполнить три индивидуальных контрольных работы:

1. Сравнение сложности данных функций.
2. Теоретическое исследование на тему «Существуют ли примитивно-рекурсивная функция для решения следующей задачи? Если да, то привести алгоритм, если – нет, то обосновать».
3. Индивидуальная задача по лямбда-исчислению.

Первая контрольная работа. Предназначена для достижения компетенции ОПК-7 с индикатором ИОПК 7.1 (Владеет навыками использования основных языков программирования для решения задач науки и техники).

Каждый студент получает индивидуальное задание «Расположите следующие 7 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть *O*(следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость».

Варианты задач

1.	2^{2^n}, $100\, n^{\ln(\ln n)}$, $0.3n\, 2^n$, e^n, $2^{2^{n+1}}$, $(\frac{3}{2})^n/1000000$, $n \ln n$
2.	$2^{\ln n}$, $10^{10}\cdot e$, $\sqrt{\ln n}$, $1000(\ln n)^2$, $2^{\sqrt{\ln n}}$, 2^n, $17(\ln n)^{\ln n}$
3.	$52 \ln n$, $n/102$, $(1+n)!$, $\ln (n!)$, $2^{\frac{\ln n}{2}}$, $10^{-100} A(n, n)$, $\lfloor \ln n \rfloor !$
4.	$76 \ln (\ln n)$, 1, πn^2, $4^{\ln n}$, $321n^3$, $(\ln n)^{\ln n}$, $n\, 2^n$
5.	$100(\frac{3}{2})^n$, $2^{\sqrt{\ln n}}$, $1000(\ln n)^{\ln n}$, $n!$, $n \ln n$, $449 \ln n$, $n^{\ln(\ln n)}$
6.	$2^{\ln n}$, e^{100}, $10 \ln (n!)$, $10^{-100} A(n, n)$, 2^{2^n}, $n\, 2^n$, $\lfloor \ln n \rfloor !$
7.	e^n, $n^2/12345$, $4^{\ln n}$, $10^6 n^3$, $\lfloor \ln n \rfloor !$, n, $\ln (n!)$
8.	$66\sqrt{\ln n}$, $0.1(\ln n)^2$, 2^n, $2^{\frac{\ln n}{2}}$, $0.005 \ln (\ln n)$, $n^{\ln(\ln n)}$, $n\, 2^n$
9.	$n^{\ln(\ln n)}$, e^n, $4563\sqrt{\ln n}$, 2^n, $4^{\ln n}$, $(\ln n)^{\ln n}$, $A(n, n)/10^{-10}$
10.	$999n\, 2^n$, $3.81n$, $2^{\frac{\ln n}{2}}$, $\lfloor \ln n \rfloor !$, $\pi \ln (n!)$, $2^{\ln n}$, $(1+n)!$
11.	2^{2^n}, $2^{2^{n+1}}$, $38(\frac{3}{2})^n$, 1234567890, n^3, $n!$, $n\, 2^n$
12.	$227 \ln n$, $16\, A(n, n)$, $\ln (\ln n)$, n^2, $0.786(\ln n)^{\ln n}$, $n \ln n$, $2^{2^{n+1}}$
13.	$0.87 \ln (n!)$, 2^{2^n}, $\ln (\ln n)$, $4^{\ln n}$, n^3, $n!/865$, $n^{\ln(\ln n)}$

14.	$2^{100} (\ln n)^2,\ 2^{2^{n+1}},\ 2^{-10}(\frac{3}{2})^n,\ \ln n,\ \lfloor \ln n \rfloor !,\ 100!\ (1+n)!,\ e^n$
15.	$0.8n\ 2^n,\ n^{\ln(\ln n)},\ 2^{\ln n},\ A(n, n)/1000!,\ (\ln n)^{\ln n},\ 23\ n \ln n,\ 2^{2^{n+1}}$
16.	$\pi\ e^n,\ 2^{\sqrt{\ln n}},\ 2^n,\ \pi^\pi,\ n,\ e\times\pi,\ (\ln n)^{\ln n}$
17.	$52\ n,\ \sqrt{n}+n,\ \frac{ne^n}{1000},\ n^2(\ln n)^{1000},\ 4-10n+2n^2,\ e^n,\ 1+n^2(100+n)$
18.	$\sqrt{n}+n,\ \frac{ne^n}{1000},\ n^2(\ln n)^{1000},\ 0.988\ n^3-100n^2,\ \ln n,\ 4-10n+2n^2,\ 0.111\ A(n, n)$
19.	$n,\ \sqrt{n}+n,\ \frac{ne^n}{1000!},\ n^2(\ln n)^{1000},\ 1+n^2(100+n),\ 3\ln n,\ n^3-100n^2$
20.	$n,\ \sqrt{n}+n,\ 0.0007\,n^2(\ln n)^{1000},\ 1000!\times A(n, n),\ 1+n^2(100+n),\ \frac{ne^n}{1000},\ e^n$

Студент должен показать свой способ решения и обосновать его.

Вторая контрольная работа. Предназначена для достижения компетенции ОПК-7 с индикатором ИОПК 7.2 (Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи, в том числе с применением современных вычислительных систем).

В каждом задание спрашивается о существование примитивно рекурсивной функции (алгоритма), с помощью которой можно решить указанную конкретную задачу.
Пример задания для второй контрольной работы: «Для формальных систем, имеющих только удлиняющие правила всегда существует разрешающий алгоритм. Реализуется ли этот алгоритм с помощью примитивно рекурсивной функции?»

Примеры индивидуальных задач.

1. Для данного натурального числа $n>1$ существуют ли такие натуральные числа a, b, c, что выполнено равенство $a^n + b^n = c^n$?
2. Являются ли числа n и $m+n$ простыми?
3. Для данного натурального числа n найдутся ли простые числа, чья разность равна n?
4. Пусть дана произвольная формальная теория. Является ли данная последовательность формул в формальной теории доказательством?
5. Пусть дана произвольная формальная теория. Является ли данная последовательность формул в формальной теории доказательством данной теоремы?
6. Пусть дана произвольная формальная теория. Является ли данная формула в формальной теории теоремой?
7. Является ли данная формула в исчислении высказываний выполнимой?
8. Является ли данная формула в исчислении высказываний противоречием?
9. Является ли данная формула в исчислении высказываний тавтологией?
10. Является ли данное натуральное число точным квадратом?
11. Является ли данное натуральное число целой степенью двойки?
12. Пусть множество X – конечное множество упорядоченных пар. Является ли множество X отношением эквивалентности?
13. Пусть множество X – конечное множество упорядоченных пар. Является ли множество X отношением частичного порядка?
14. Для формальных систем, имеющих только удлиняющие правила всегда существует разрешающий алгоритм. Реализуется ли этот алгоритм с помощью примитивно рекурсивной функции?

15. Найти наименьшую пару простых чисел-близнецов, больших данного натурального числа (простые числа называются простыми числами близнецами, если разность между ними равна 2) .
16. Является ли данная формула исчисления высказываний противоречием?
17. Является ли две данных формулы исчисления высказываний равносильными?
18. Дана произвольная формальная теория и некоторая формула из этой теории. Является ли это формула общезначимой?
19. Дана произвольная формальная теория и некоторая формула из этой теории. Является ли это формула противоречием?
20. Вычислить сумму данного сходящегося ряда с заданной погрешностью.

Третья контрольная работа. Предназначена для достижения компетенции ОПК-7 с индикатором ИОПК 7.1 (Владеет навыками использования основных языков программирования для решения задач науки и техники).

В состав третьей контрольной работы входит получения некоторых результатов (доказательство равенства, нахождения нормальной формы и других) для лямбда-выражений в рамках лямбда-исчисления. Каждый должен решить две задачи.

Примеры лямбда-задач.

1. Найти нормальную форму для $KBaKbcd$.
2. Найти нормальную форму для $KBaKbc$.
3. Показать, что $BBBIII \neq KI$.
4. Пусть Y – комбинатор неподвижной точки и $Y^0 \equiv Y$,
5. $Y^{n+1} \equiv (Y^n)\ (SI)$. Докажите, что все термы Y^0, Y^1, Y^2,… – комбинаторы неподвижной точки.
6. Пусть $C \equiv \lambda fgx.\ fxg$ и $<n>$ – нумерал Чёрча.
7. Докажите, что $<2n + 1>\ C = C$ и $<2n>\ C = I$ для натуральных n.
8. Пусть $B \equiv \lambda fgx.\ f(gx)$ и $W \equiv \lambda xy.\ x\ y\ y$.
9. Доказать, что для любого нумерала Чёрча при $n > 0$ имеет место равенство $<n>BW\ f\ x_1\ldots x_n\ x_{n+1} = f\ x_1\ldots x_n\ x_{n+1}\ x_{n+1}$ (удваивается последний аргумент).
10. Доказать not (not true) = true, not (not false) = false
11. Использовать K = λxy. x, I = λx. x, true = K, false = KI, not = λx. x false true, K A B = A, (KI) A B = B.
12. Проделать два варианта, начиная вычисления с разных редексов: not (not A) и not (not A) – редексы подчеркнуты.
13. Доказать, что or *K* ... *K* = K для четного количества K и or *K* ... *K* = λy. K для нечетного количества K.
14. Использовать or = λxy. x true y
15. Показать, что I ≠ K.
16. Пусть Sxyz = (xz)(yz). Показать, что I ≠ S.
17. Показать, что аппликация не ассоциативна, точнее x(yz) ≠(xy)z.
18. Пусть R = λxyz.yzx и implies = R true (импликация). Проверьте таблицу истинности для implies.
19. Пусть комбинатор A = λx.xxx. Найти нормальную форму λ-выражения (λyz.zy)(AA)(λw.I) двумя способами: a) использовать аппликативный порядок редукции – вначале преобразовывать самый левый из самых внутренних редексов; b) использовать нормальный порядок редукции – вначале преобразовывать самый левый из самых внешних редексов.
20. Показать, что x ≠ xy.
21. Показать, что xx ≠ xy.

Выполнение каждой индивидуальной работы оценивается в баллах: 3, 4 или 5. Все три работы должны быть обязательно выполнены до начала сессии.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет с оценкой в шестом семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Определение и пример работы машины Тьюринга.
2. Какие особенности машин Тьюринга не важны для определения вычислимости.
3. Определения и примеры примитивно рекурсивных функций.
4. Определение и примеры частично-рекурсивных функций.
5. Необходимость минимизации и пример применение минимизации.
6. Свойства функции Аккермана.
7. Что такое тезис Чёрча с математической точки зрения: аксиома, теорема, гипотеза, или что-то иное? Применение тезиса Чёрча на практике.
8. Применения лямбда-исчисления.
9. Что такое комбинаторы и их применения?
10. Метод «разделяй и властвуй». Примеры алгоритмов.
11. Жадные алгоритмы. Примеры.
12. Динамическое программирование. Примеры.
13. Определения и примеры алгоритмически неразрешимых задач.
14. Определения и примеры диофантовых множеств.
15. Теорема Матиясевича.
16. Генетический подход к решению задачи коммивояжера.
17. Сводка наиболее популярных NP-полных задач.

При выставлении окончательной оценки учитываются набранные баллы за семестр плюс положительные ответы на вопросы на зачете (по пятибалльной системе). Оценка за зачет определяется общей суммой: 15-18 баллов – «удовлетворительно», 19-22 – «хорошо». 23-25 – «отлично».

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний могут быть использованы для формирования программы ГИА (программы государственного экзамена), а также экспертом Рособрнадзора при проведении проверки диагностической работы по оценки уровня форсированности компетенций обучающихся (при контрольно-надзорной проверке). Вопросы данного раздела показывают вклад дисциплины в образовательный результат образовательной программы. Объем заданий в данном разделе зависит как от количества формируемых индикаторов достижения компетенций, так и от объема дисциплины по учебному плану.

Тест

1. (ИОПК 7.1) Даны три функции: $\ln n, \sqrt{\ln n}, \ln(\ln n)$. Какие из следующих утверждений истинны?
   а) $\ln n = O(\ln(\ln n))$.
   б) $\sqrt{\ln n} = O\big(\ln(\ln n)\big)$.
   в) $\sqrt{\ln n} = O(\ln n)$.

2. (ИОПК 7.1) Даны три функции: $1000\ln(n)$, $2^{\sqrt{\ln(n)}}$, $(\ln(n))^2$. Какие из следующих утверждений истинны?
   а) $2^{\sqrt{\ln(n)}} = O(1000\ln(n)))$.

б) $(\ln(n))^2 = 1000\ln(n)$.

в) $(\ln(n))^2 = O(2^{\sqrt{\ln(n)}})$.

3. (ИОПК 7.1) Даны три функции: $100(\ln(n))^2, 2^{\sqrt{\ln(n)}}$, $1000\times 2^{\frac{\ln(n)}{2}}$. Какие из следующих утверждений истинны?
   а) $100(\ln(n))^2 = O\left(2^{\sqrt{\ln(n)}}\right)$. .
   б) $1000\times 2^{\frac{\ln(n)}{2}} = O(2^{\sqrt{\ln(n)}})$.
   в) $2^{\sqrt{\ln(n)}} = O(1000\times 2^{\frac{\ln(n)}{2}})$.

4. (ИОПК 7.1) Даны три функции: $0{,}001n^{\ln(n)}, n$, $1000000\times 2^{\ln(n)}$. Какие из следующих утверждений истинны?
   а) $n = O(0{,}001n^{\ln(n)})$.
   б) $n = 1000000\times 2^{\ln(n)}$
   в) $0{,}001n^{\ln(n)} = O(1000000\times 2^{\ln(n)})$.

5. (ИОПК 7.1) Даны три функции: $\ln(n!), n^2$, $1000000\times 4^{\ln(n)}$. Какие из следующих утверждений истинны?
   а) $\ln(n!) = O(n^2)$.
   б) $n^2 = O(\ln(n!))$
   в) $1000000\times 4^{\ln(n)} = O(n^2)$.

6. (ИОПК 7.1) Даны три функции: $(ln(n))^n, n^3$, $0.001\times(3/2)^n$. Какие из следующих утверждений истинны?
   а) $n^3 = O(0.001\times(3/2)^n)$.
   б) $0.001\times(3/2)^n = n^3$
   в) $(ln(n))^n = O(0.001\times(3/2)^n)$.

7. (ИОПК 7.1) Даны три функции: $100n, 1000n, 10n$. Какие из следующих утверждений истинны?
   а) $100n = O(10n)$.
   б) $1000n = O(10n)$
   в) $10n = O(1000n)$.

8. (ИОПК 7.2) Являются ли числа *n* и *m*+*n* простыми? Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?
   а) Да
   б) Нет
   в) Зависит от конкретных значений n и m.

9. (ИОПК 7.2) Для данного натурального числа *n* найдутся ли простые числа, чья разность равна *n*?
   Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?
   а) Да
   б) Нет в общем случае.
   в) Зависит от конкретных значений n.

10. (ИОПК 7.2) . Пусть дана произвольная формальная теория. Является ли данная формула в формальной теории теоремой? Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?

а) Да
б) Нет в общем случае.

11. (ИОПК 7.2) . Является ли данная формула в исчислении высказываний выполнимой? Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?
а) Да
б) Нет в общем случае.

12. (ИОПК 7.2). Является ли данная формула в исчислении высказываний противоречием? Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?
а) Да
б) Нет в общем случае.

13. (ИОПК 7.2). Является ли данная формула в исчислении высказываний тавтологией? Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?
а) Да
б) Нет в общем случае.

14. (ИОПК 7.2). Найти наименьшую пару простых чисел-близнецов, больших данного натурального числа (простые числа называются простыми числами близнецами, если разность между ними равна 2) .
Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?
а) Да
б) Нет в общем случае.

15. (ИОПК 7.2). Является ли две данных формулы исчисления высказываний равносильными?
Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?
а) Да
б) Нет в общем случае.

16. (ИОПК 7.2). Дана произвольная формальная теория и некоторая формула из этой теории. Является ли это формула общезначимой? Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?
а) Да
б) Нет в общем случае.

17. (ИОПК 7.2). Дана произвольная формальная теория и некоторая формула из этой теории. Является ли это формула противоречием? Можно ли ответить на этот вопрос, используя примитивно рекурсивную функцию?
а) Да.
б) Нет в общем случае.

18. (ИОПК 7.1). Чем является тезис Чёрча?

а) Это теорема.
б) Это гипотеза.
в) Это аксиома.
г) Это вера математиков, подкрепляемая математическими аргументами.

19. (ИОПК 7.1). Можно ли построить реальную машину Тьюринга?

а) Да.
б) Нет.
в) Искусственный интеллект сможет.

20. (ИОПК 7.1). Роль оператора минимизации при формализации частично-рекурсивных функций. Что ложно в следующем списке?

а) Позволяет вводить функции, заданные неявно.
б) Позволяет вычислять с помощью цикла в форме for, так как верхнюю границу для числа повторений можно указать заранее.
в) Позволяет вводить в вычисления перебор объектов для отыскания объекта в бесконечном семействе.

21. (ИОПК 7.1). Какими свойствами обладает функция Аккермана?

а) Является примитивно рекурсивной.
б) Является вычислимой.
в) Является рекурсивной.
г) Является всюду определенной.

22. (ИОПК 7.1). Кто изобрел лямбда-исчисление?

а) Клини.
б) Дирихле.
в) Чёрч.
г) Гёдель.

23. (ИОПК 7.1). Для реализации каких языков программирования применяются в основном комбинаторы?

а) Для ленивых функциональных языков.
б) Языки логического программирования.
в) Для языков искусственного интеллекта.

24. (ИОПК 7.1). Какими свойствами обладает лямбда исчисления?

а) Характеризует неформальное понятие эффективной вычислимости.
б) Может быть непосредственно использована для написания программ.
в) Вводит функцию ак множество пар, состоящих из аргумента и значения.
г) Функция в лямбда-исчислении не может применяться сама к себе.

25. (ИОПК 7.1). Гильберт в «Гёттингенской программе» выдвинул следующие тезисы.

1. Математика является **полной**, т.е. существует полная аксиоматическая теория математики, из которой с помощью последовательного использования правил математической логики можно вывести все положения математики.

2. Математика является **непротиворечивой**, т.е. нельзя доказать и одновременно опровергнуть какое-либо утверждение, не нарушая принятых правил рассуждения.

3. Математика является **разрешимой**, т.е., пользуясь правилами, можно выяснить относительно любого математического утверждения, доказуемо оно или опровержимо.

Какие из этих тезисов оказались истинными?
Гильберта являются истинными?

а) По крайней мере, математика полная.
б) По крайней мере, математика непротиворечива.
в) По крайней мере, математика разрешима.
г) Все три тезиса ложны.
д) Все три тезиса истинны

Ключи: **1**, в; **2**, в; **3**, а, в; **4**, а; **5**, а, в; **6**, а, в; **7**, а, б, в; **8**, а; **9**, б; **10**, б; **11**, а; **12**, а; **13**, а; **14**, б; **15**, а; **16**, б; **17**, б; **18**, г; **19**, б; **20**, б; **21**, б, в, г; **22**, в; **23**, а; **24**, а, б, в; **25**, г.

Информация о разработчиках

Зюзьков Валентин Михайлович, кандидат ф-мат. наук, старший научный сотрудник, ММФ, доцент.