

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математическое моделирование и информационные системы

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2024

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4 Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2 Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3 Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4 Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Задачи освоения дисциплины

- привить навыки работы с учебной литературой по линейной алгебре и аналитической геометрии,
- обучить студентов основным понятиям линейной алгебры и аналитической геометрии, умению решать типовые задачи,
- обучить умению пользоваться методами линейной алгебры и аналитической геометрии при решении практических задач и разработке математических моделей технических и социально-экономических систем.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Дисциплина входит в модуль Модуль «Математика».

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Первый семестр, зачет

Первый семестр, экзамен

Второй семестр, зачет

Второй семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 14 з.е., 504 часов, из которых:

-лекции: 124 ч.

-практические занятия: 124 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Матрицы и определители

Матрицы и действия над ними. Блочные матрицы. Определение определителя. Определители II и III порядков. Основные свойства определителей. Алгебраические дополнения, миноры. Связь миноров с алгебраическими дополнениями. Теорема Лапласа. Вычисление определителей. Обратная матрица и ее вычисление. Линейная зависимость вектор-столбцов. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Способы вычисления ранга матрицы.

Тема 2. Системы линейных уравнений

Основные понятия. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера. Общая теория. Число решений линейной системы. Метод Гаусса. Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение неоднородной системы.

Тема 3. Векторная алгебра.

Скалярные и векторные величины. Действия над векторами. Базис и координаты вектора. Линейная зависимость векторов. Признаки линейной зависимости. Понятие векторного пространства. Размерность и базис векторного пространства. Координаты вектора. Условие коллинеарности векторов. Аффинные и декартовы координаты точки на прямой, на плоскости и в пространстве. Ортогональная проекция вектора. Скалярное произведение векторов и его свойства. Ориентация тройки векторов. Векторное произведение и его свойства. Смешанное произведение трех векторов. Двойное векторное произведение. Простейшие задачи аналитической геометрии. Преобразование базиса и системы координат.

Тема 4. Уравнения линий и поверхностей

Уравнения линий и поверхностей. Алгебраические линии и поверхности. Параметрические уравнения линий и поверхностей. Сфера. Конусы. Цилиндры.

Тема 5. Линейные образы на плоскости и в пространстве.

Уравнения прямых и плоскостей. Поверхности и линии I-го порядка. Неполные уравнения плоскости и прямой на плоскости. Уравнения плоскости и прямой на плоскости в отрезках. Нормальные уравнения плоскости и прямой на плоскости. Приведение общих уравнений плоскости и прямой на плоскости нормальному виду. Расстояние от точки до прямой (плоскости). Условия ортогональности и параллельности прямых на плоскости и плоскостей. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом. Угол между прямыми в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Параметрические уравнения плоскости. Пучок и связка прямых. Пучок плоскостей. Связка плоскостей.

Тема 6. Линии II порядка.

Эллипс. Каноническое уравнение эллипса. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Парабола. Каноническое уравнение параболы. Уравнения линий второго порядка в полярных координатах. Касательные к линиям II-го порядка. Приведение уравнения линии II-го порядка к каноническому виду. Инварианты линии II-го порядка.

Тема 7. Поверхности II порядка

Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Цилиндры и конусы II-го порядка. Поверхности вращения. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида. Касательные к поверхностям II-го порядка. Касательная плоскость.

Тема 8. Алгебраические структуры

Множества и подмножества. Операции над множествами. Бинарные отношения. Отношения порядка и эквивалентности. Отображения. Композиция отображений. Алгебраические операции. Обратная операция. Группа. Кольцо. Поле. Поле комплексных чисел. Основная теорема алгебры. Кольцо многочленов. Делимость многочленов. Основная теорема алгебры и следствия из нее.

Тема 9. Линейные пространства

Линейные пространства. Определение. Базис пространства и координаты вектора. Размерность линейного пространства. Изоморфизм конечномерных линейных пространств. Преобразование базисов пространства и координат векторов. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка. Задание линейных подпространств СЛУ. Пересечение и сумма линейных подпространств. Прямая сумма. Размерность суммы и пересечения линейных подпространств. Линейные многообразия.

Тема 10. Элементы аналитической геометрии в n – мерном пространстве

Точечно-векторное аффинное пространство. Система координат и ее преобразование. K -мерные плоскости. Прямая и отрезок прямой. Гиперплоскость. Выпуклые множества. Полупространства. Выпуклые оболочки. Симплексы.

Тема 11. Евклидовы и унитарные пространства

Евклидовы пространства. Определение. Неравенство Шварца. Длина (норма) вектора. Расстояние. Ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение. Проектирование вектора на подпространство. Изоморфизм евклидовых пространств. Унитарные пространства.

Тема 12. Линейные операторы

Линейные операторы. Определение. Сложение и умножение на число. Произведение операторов. Ранг и дефект линейного оператора. Невырожденные операторы. Обратный оператор. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Тема 13. Канонические формы матрицы линейного оператора

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Определение и основные свойства. Характеристический многочлен оператора. Нахождение собственных значений и векторов. Операторы простой структуры. Инвариантные подпространства. Индуцированный оператор. Операторный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона. Треугольная форма матрицы оператора. Нильпотентные операторы. Канонический базис нильпотентного оператора. Приведение матрицы оператора к канонической жордановой форме.

Тема 14. Линейные операторы в унитарном пространстве

Линейные операторы в унитарном пространстве. Сопряженные операторы. Нормальные операторы. Унитарный оператор. Самосопряженный оператор. Положительно определенные операторы. Полярное разложение оператора. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве. Вариационное описание собственных значений самосопряженного оператора. Норма оператора.

Тема 15. Линейные, билинейные и квадратичные формы

Линейные формы. Билинейные формы. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод Якоби. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Матрица Грама. Критерий Сильвестра

Тема 16. Билинейные и квадратичные формы на унитарном пространстве. Гиперповерхности второго порядка

Билинейные и квадратичные формы на евклидовом пространстве. Связь между билинейными формами и линейными операторами. Приведение квадратичной формы в ортонормированном базисе. Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду. Гиперповерхности второго порядка. Приведение уравнения гиперповерхности второго порядка к каноническому виду.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, тестов по лекционному материалу, контроля выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Оценочные материалы текущего контроля размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамены в первом и втором семестре проводится в устной или письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов:

МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Определение умножения матрицы на матрицу. Свойства умножения.
2. Определение определителя матрицы n -го порядка.
3. Определение члена определителя. Определение знака члена определителя путем подсчета инверсий.
4. Определение алгебраических дополнений. Формулы разложения определителя по столбцу и строке.
7. Понятие дополнительных миноров матрицы. Связь миноров с алгебраическими дополнениями.
8. Теорема Лапласа.
9. Понятие обратной матрицы. Необходимое и достаточное условие существования. Формула вычисления.
10. Понятие ранга матрицы. Основные свойства.
11. Теорема о базисном миноре. Второе определение ранга матрицы.
12. Вычисление ранга матрицы сведением ее к канонической.
13. Понятие системы линейных уравнений. Матричная запись. Совместность и определенность.
14. Условие совместности системы (Теорема Кронекера-Капелли).
15. Формулы Крамера. Условие их применимости.
16. Понятие базисной системы. Главные и свободные неизвестные.
17. Метод Гаусса.
18. Однородные системы. Условие нетривиальной совместности.
19. Фундаментальная система решений. Связь числа фундаментальных решений с рангом системы.
20. Структура общего решения однородной и неоднородной систем.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

1. Определение вектора. Длина вектора. Равенство векторов.
2. Сложение векторов. Свойства.
3. Умножение вектора на число. Свойства.
4. Понятие линейной зависимости векторов. Признаки линейной зависимости.
5. Понятие векторного пространства.
6. Понятие размерности векторного пространства.
6. Определение базиса и координат вектора (V_1, V_2, V_3).
7. Условие коллинеарности векторов.
8. Аффинные и декартовы координаты точек на прямой, плоскости и в пространстве.
9. Ортогональная проекция вектора. Свойства.
10. Скалярное произведение и его свойства.
11. Векторное произведение и его свойства.
12. Смешанное произведение и его свойства.
13. Формулы преобразования базиса на плоскости и в пространстве.
14. Формулы преобразования системы координат на плоскости и в пространстве.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Понятия об уравнении линии на плоскости.
2. Понятия об уравнении поверхности
3. Понятие об уравнениях линии в пространстве.
3. Понятие алгебраической линии и алгебраической поверхности.
4. Параметрические уравнения линий
5. Параметрические уравнения поверхностей.
6. Общее уравнение прямой на плоскости.
7. Уравнение прямой на плоскости в отрезках.
8. Нормальное уравнение прямой на плоскости.
9. Определение расстояния от точки до прямой на плоскости.
10. Общее уравнение плоскости.
11. Нормальное уравнение плоскости.
12. Определение расстояния от точки до плоскости.
13. Параметрические уравнения прямой.
14. Канонические уравнения прямой.
15. Каноническое уравнение эллипса. Смысл параметров уравнения.
16. Каноническое уравнение гиперболы. Смысл параметров уравнения.
17. Каноническое уравнение параболы. Смысл параметров уравнения.
18. Каноническое уравнение эллипсоида. Смысл параметров уравнения.
19. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида. Смысл параметров уравнения.
20. Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида. Смысл параметров уравнения.
21. Каноническое уравнение эллиптического параболоида. Смысл параметров уравнения.
22. Каноническое уравнение гиперболического параболоида. Смысл параметров уравнения.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

1. Определение отображения.
2. Определение алгебраической операции.
3. Определение обратной операции.
4. Определение группы.

5. Определение кольца.
6. Определение поля.
7. Определение изоморфных групп.

ЛИНЕЙНЫЕ, АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

1. Определение линейного пространства.
2. Понятие линейной зависимости.
3. Понятие размерности пространства.
4. Понятия базиса пространства и координат вектора.
5. Понятие линейного подпространства.
6. Понятие линейной оболочки.
7. Задание линейных подпространств системами линейных уравнений.
4. Понятия пересечения и суммы линейных подпространств. Теоремы о размерности пересечения и суммы.
5. Определение точечно-векторного аффинного пространства.
6. Система координат в пространстве .
7. Плоскость в .
8. Прямая плоскость в .
6. Определение евклидова пространства. Скалярное произведение.
7. Длина вектора.
8. Ортогональность. Ортонормированный базис.
9. Проектирование вектора на подпространство.
7. Понятие унитарного пространства. Свойства унитарного пространства.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

1. Понятие линейного оператора.
2. Понятия ранга и дефекта линейного оператора.
3. Построение матрицы линейного оператора.
4. Преобразование матрицы оператора при изменении базиса.
5. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
6. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен.
4. Разложение матрицы оператора простой структуры.
5. Определение инвариантного подпространства.
6. Треугольная форма матрицы оператора.
7. Понятие нильпотентного оператора. Каноническая форма матрицы нильпотентного оператора.
8. Нормальная жорданова форма, Приведение матрицы оператора к нормальной жордановой форме.
9. Сопряженный оператор.
10. Нормальные операторы. Матрица нормального оператора.
11. Унитарные операторы. Матрица унитарного оператора.
12. Самосопряженный оператор. Приведение матрицы самосопряженного оператора.

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

1. Определение билинейной формы. Построение матрицы билинейной формы.
2. Определение квадратичной формы. Построение матрицы квадратичной формы.
3. Канонический вид квадратичной формы.
4. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
5. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду.

6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе.
7. Одновременное приведение к каноническому виду двух квадратичных форм.
8. Приведение к каноническому виду уравнение гиперповерхности второго порядка.
9. Закон инерции квадратичных форм.
10. Определение матрицы Грама. Свойства матрицы Грама.
11. Критерий Сильвестра.

Примеры задач:

I семестр

1. Решить систему по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 1, \\ x + 3y = -1. \end{cases}$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

3. Найти проекцию точки $A(4, -3, 1)$ на плоскость $5x + 3y - z - 3 = 0$.

4. Составить уравнения проекции прямой

$$\begin{cases} x - 4y + 2z - 5 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $2x + 3y - z + 2 = 0$.

II семестр

1. Линейное подпространство L задано уравнениями

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0, \\ 9x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение $L^\perp$.

2. Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис подпространства, натянутого на заданную систему векторов

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. Найти ранг, дефект, ядро и образ операторов, заданного следующей матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Найти квадратный корень для матрицы

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Результаты экзаменов определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

оценка «отлично», если студент уверенно владеет теоретическим материалом, относящимся к линейной алгебре и аналитической геометрии, уверенно использует его при решении задач линейной алгебры и аналитической геометрии;

оценка «хорошо», если студент хорошо владеет теоретическим материалом, относящимся к линейной алгебре и аналитической геометрии, хорошо использует его при решении задач линейной алгебры и аналитической геометрии;

оценка «удовлетворительно», если студент недостаточно хорошо владеет теоретическим материалом, относящимся к линейной алгебре и аналитической геометрии, недостаточно хорошо использует его при решении задач линейной алгебры и аналитической геометрии;

оценка «неудовлетворительно», если студент не владеет теоретическим материалом, относящимся к линейной алгебре и аналитической геометрии, неуверенно использует его при решении задач линейной алгебры и аналитической геометрии.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=00000>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

По курсу предусмотрены следующие практические занятия:

1. Операции над матрицами - 2 час.
2. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка - 2 час.
3. Вычисление определителей - 2 час.
4. Вычисление определителей - 2 час.
5. Вычисление определителей - 2 час.
6. Теорема Лапласа - 2 час.
7. Обратная матрица - 2 час.
8. Ранг матрицы - 2 час.
9. Решение систем линейных уравнений. Формулы Крамера - 2 час.
10. Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса - 2 час.
11. Решение однородных систем линейных уравнений - 2 час.
12. Решение однородных систем линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. - 2 час.
13. Операции над векторами - 2 час.
14. Линейная зависимость векторов. Базис и координаты вектора - 2 час.
15. Скалярное произведение. Ортогональное проектирование вектора - 2 час.

16. Векторное произведение - 2 час.
 17. Смешанное и двойное векторное произведение - 2 час.
 18. Решение простейших задач аналитической геометрии - 2 час.
 19. Прямая на плоскости - 2 час.
 20. Прямая на плоскости - 2 час.
 21. Плоскость - 2 час.
 22. Плоскость - 2 час.
 23. Прямая в пространстве – 2 час.
 24. Прямая и плоскость в пространстве - 2 час.
 25. Прямая и плоскость в пространстве - 2 час.
 26. Эллипс. Окружность - 2 час.
 27. Гипербола - 2 час.
 28. Парабола - 2 час.
 29. Кривые 2-го порядка в полярных координатах - 2 час.
 30. Приведение кривых 2-го порядка к каноническому виду - 2 час.
 31. Сфера - 2 час.
 32. Конус и цилиндр - 2 час.
 33. Алгебраические структуры - 2 час.
 34. Линейные пространства. Базис и координаты вектора - 2 час.
 35. Линейные подпространства - 2 час.
 36. Прямая и плоскость - 2 час.
 37. Евклидовы пространства - 2 час.
 38. Евклидовы пространства - 2 час.
 39. Матрица линейного оператора - 2 час.
 40. Образ и ядро линейного оператора - 2 час.
 41. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора - 2 час.
 42. Инвариантные подпространства - 2 час.
 43. Каноническая форма Жордана - 2 час.
 44. Метод Лагранжа. Метод Якоби – 2 час.
 45. Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах - 2 час.
 46. Самосопряженные операторы – 2 час.
 47. Приведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе - 2 час.
 48. Гиперповерхности n -го порядка - 2 час.
- г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.
Вся основная и дополнительная литература, необходимая для самостоятельной работы и подготовки к контрольным точкам и зачетам, имеется в научной библиотеке ТГУ.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

- Лившиц К.И. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник / К.И. Лившиц – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 508 с.
- Лившиц К.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Ч. I: учебник/ К.И. Лившиц – Томск: Изд. НТЛ, 2011. – 252 с.
- Лившиц К.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Ч. II: учебник/ К.И. Лившиц – Томск: Изд. НТЛ, 2011. – 276 с.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: учебник / В.А. Ильин – М.: Физматлит, 2020. – 224 с.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин – М.: Физматлит, 2020, – 280 с.

- Воеводин В.В. Линейная алгебра: учебник / В.В. Воеводин – М.: Физматлит, 2021. – 416 с.
- Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю. Задачи и упражнения по линейной алгебре: учебное пособие / К. И. Лившиц – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2016, 140 с.
- Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков – СПб.: Издательство «Лань», 2019. – 476 с.
- Цубербилер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербилер – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 336 с.
- б) дополнительная литература:
 - Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П.С. Александров – СПб.: Лань, 2016. – 512 с.
 - Скорняков Л.А. Элементы алгебры: учебник / Л.А. Скорняков – М.: Наука, 1986. – 238 с.
 - Ланкастер П. Теория матриц: учебник / П. Ланкастер – М.: Наука 1978. – 280 с.
 - Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / Р. Хорн – М.: Наука, 1989. – 655 с.
 - Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия: учебник / Н.В. Ефимов – М.: Физматлит, 2005 – 544 с.
- б) ресурсы сети Интернет:
 - открытые онлайн-курсы

13. Перечень информационных технологий

- а) информационные справочные системы:
 - Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
 - Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
 - ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
 - ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
 - Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
 - ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
 - ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>
- б) профессиональные базы данных (*при наличии*):
 - Университетская информационная система РОССИЯ – <https://uisrussia.msu.ru/>
 - Единая межведомственная информационно-статистическая система (ЕМИСС) – <https://www.fedstat.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Лившиц Климентий Исаакович, д.т.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики ИПМКН НИ ТГУ.