Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Математический анализ

по направлению подготовки
01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук
Основы научно-исследовательской деятельности в области механики и математического моделирования

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.
ОПК-8 Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики, механики, компьютерных наук и информатики.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:
ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.
ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.
ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.
ИОПК 8.1 Демонстрирует способность подготовить конспект или план занятия по теме из области математики, механики, компьютерных наук или информатики.
ИОПК 8.2 Выбирает подходящие источники информации для подготовки конспекта или плана занятия по выбранной теме.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:
– тесты;
– контрольные работа;
– индивидуальные задания;
– коллоквиумы по теории;

I семестр обучения

Тест (Выполняется дома, ограничение по времени 1,5 часа, автоматическая проверка ответов, 26 заданий, ИОПК-1.3.)

Требования по выполнению теста: тест считается пройденным, если студент верно сделал 20 заданий. Решения заданий должны быть кратко записаны в тетради.

Примеры заданий:

1. Вычислите $\inf \{f(x) \mid f(x) = x^2+4x+3,\ x \in\mathbb{R}\}$. Верный ответ: -1

2. Функция $y=3x^2-6$ задана на множестве A.
При каких A функция является инъекцией? Выберите все правильные ответы!
a. A=[-5;3) b. A=[0;6] c. A=[3;100) d. A=[-6;6] e. A=[-5;-3] f. A=[-6,0].
Верный ответ: b, c, e, f.

3. Какие функции из списка являются инъекцией, если все функции заданы на промежутке (- π/2, π/2).
Выберите один или несколько ответов:
a) y=tg(x) b)y=cos(x) c)y=sign(x) d)$y=2^x$ e) y=|x| f) y=sin(x) g)$y=x^2$ h)y=x

Верный ответ: a, d, e, h

Коллоквиум (проводится во время консультаций, ИОПК 1.1, ИОПК 1.3, ИОПК 8.1., ИОПК 8.2) . Темы для обсуждения: Множества и операции над множествами. Некоторые формулы теории множеств. Семейства множеств. Операции над семействами. Отображения множеств. Основные понятия. Множество вещественных чисел. Точные грани числовых множеств. Натуральные числа как подмножество вещественных. Целые и рациональные числа. Существование корней из вещественных чисел. Свойства образов и прообразов при отображении. Мощность множества. Счетные, несчетные, континуальные множества.

Критерии оценивания:

Оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» может быть выставлена только при наличии у студента личных конспектов с ответами на указанные темы и указанием литературы, которая была использована при подготовке конспектов.

Результаты коллоквиума определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если студент показал знания в выбранной случайным образом теме, выходящие за пределы содержания лекций (самостоятельные доказательства отдельных результатов).

Оценка «хорошо» выставляется, если студент показал знания в выбранной случайным образом теме, не выходящие за рамки доказанного на лекциях.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент показал знания в терминах и фактах выбранной случайным образом темы, но не сумел довести до конца необходимые доказательства, которые были приведены на лекциях.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется, если студент не смог дать определения, необходимые для обсуждения выбранной случайным образом темы.

Индивидуальное задание №1 (выполняется в рамках СРС, даются различные варианты, проверяются ИОПК-1.3., ИОПК 1.2)

Доказать, используя метод математической индукции:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + ... + n \cdot (3n - 1) = n^2 (n + 1), \forall n \in \mathrm{N}$

Требования по выполнению: приведено доказательство, содержащее проверку базы индукции и правильно выполненный индукционный переход.

Засчитывается только правильно выполненное задание. Оценка: «Зачет» или «Незачет»

Контрольная работа №1 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

ВАРИАНТ 1

1. Доказать по определению: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3 - 1} = +\infty$

2. Найти пределы:

2.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$ 2.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n + n!}{2^n + (n+1)!}$ 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{3n-2}\right)^n$ 2.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

3. Исследовать последовательности на сходимость:

3.1 $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{n^3}$ 3.2 $x_n = \cos(\pi n) \cdot \dfrac{n}{3n-2}$

Требования по выполнению заданий контрольной работы по номерам:

1. Должно быть верно записано определение и проведено доказательство

2. Ко всем заданиям должно быть приведено решение, приводящее к верному ответу.

3. К заданиям должно быть приведено рассуждение, использующее определения и теооремы о сходимости последовательностей и приводящее к верному ответу.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные решения более 5 задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные решения 5 задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные решения 4 задач.

Контрольная работа №2 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

ВАРИАНТ 1

1.Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x = 0$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{\ln\ 1+x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg\ 1+\sin x}{2^{x+x^2}-1}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{2x}$

6. Доказать: $1+x\ ^n = 1+nx+o(x),\ x\to 0$ 7.Найти точки разрыва, определить их род: $f(x)=(\lg x)^{-1}$

Требования по выполнению заданий контрольной работы по номерам:

1. Должно быть верно записано определени и проведено доказательство
2 – 5. Ко всем заданиям должно быть приведено решение, приводящее к верному ответу.
6. Должно быть верно записано определени и проведено доказательство
7. Должно быть приведено обоснование точек разрыва с использованием определения точки разрыва и нахождения пределов.

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные решения более 5 задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные решения 5 задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные решения 4 задач.

Индивидуальное задание № 2 (выполняется в рамках СРС, даются различные варианты, графики строятся после исследования функции, вручную. Проверяются ИОПК-1.3., ИОПК 1.2, ИОПК 1.1)

ВАРИАНТ 1. Задать и исследовать функции, построить их графики: 1) $y = x+\sqrt{x^2-1}$, 2) $y=\sin(x)-\ln(\sin(x))$. На одном графике выбрать точку, построить график многочлена Тейлора второго порядка в этой точке.

Построить кривую, заданную параметрически, проведя исследование с помощью производных: $x=(t^2+6t+5)/3, y=(t^3-54)/2t$

Результаты индивидуального задания определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если исследованы и построены три кривые, а также график многочлена Тейлора.

Оценка «хорошо» выставляется, исследовано и построено две кривые из трех, а также график многочлена Тейлора к одной из построенных кривых.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если построена одна кривая из трех и график моногочлена Тейлора к этой кривой.

В остальных случаях – оценка «Неудовлетворительно».

II семестр обучения

Контрольная работа №1 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

ВАРИАНТ 1. Вычислить неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, 2. $\int \frac{x^5 dx}{x^4-2x^3+2x-1}$, 3. $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2+1}}$, 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$,

5. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$, 6. $\int \frac{1+\sin x}{\sin 2x+2\sin x}dx$, 7. $\int \sin x\cdot \operatorname{ch}x\,dx$.

Требования по выполнению заданий контрольной работы по номерам:

1 – 7. Ко всем заданиям должно быть приведено решение, приводящее к верному ответу.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные решения более 5 задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные решения 5 задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные решения 4 задач.

Коллоквиум (проводится на практическом занятии, проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 1.3, ИОПК 8.1., ИОПК 8.2) .

Темы для обсуждения: 1. Объединение семейства открытых множеств открыто. 2. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто. 3. Пересечение семейства замкнутых множеств замкнуто, объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто. 4. Свойства замыкания множества. 5. Ограниченность компакта. 6. Замкнутость компакта.7. Критерий компактности в метрическом пространстве. 8. Критерий компактности в евклидовом пространстве. 9. Пересечение центрированного семейства компактов не пусто. 10. Свойства фундаментальных последовательностей. 11. Полнота подпространства. 12. Компактность множества в подпространстве. 13. Критерий непрерывности отображения (через прообразы открытых множеств). 14. Непрерывный образ компакта есть компакт. 15. Т. Вейерштрасса о непрерывных функциях на компакте. 16. Об обратном отображении компактов.17. Т. Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на компакте.

Критерии оценивания:

Оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» может быть выставлена только при наличии у студента личных конспектов с ответами на указанные темы и указанием литературы, которая была использована при подготовке конспектов.

Результаты коллоквиума определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если студент показал знания в выбранной случайным образом теме, выходящие за пределы содержания лекций (самостоятельные доказательства отдельных результатов).

Оценка «хорошо» выставляется, если студент показал знания в выбранной случайным образом теме, не выходящие за рамки доказанного на лекциях.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент показал знания в терминах и фактах выбранной случайным образом темы, но не сумел довести до конца необходимые доказательства, которые были приведены на лекциях.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется, если студент не смог дать определения, необходимые для обсуждения выбранной случайным образом темы.

Контрольная работа №2 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

1. Пусть $f = f(x,y,z); x = t^2; y = \ln(t+1); z = \sin t$. Найти $df\big|_{t_0=0}$.

2. $u^3 + 3xyu + 1 = 0; x_0 = 0; y_0 = 1$. Найти $u_0\left(x_0, y_0\right); du\left(x_0, y_0\right)$.

3. $f = \dfrac{\cos x}{\cos y}; x_0 = 0; y_0 = 0$. Разложить f по формуле Тейлора до второго порядка включительно.

4. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4}$ в точке $M(0, 2, 1)$. В каких точках касательная плоскость параллельна плоскости $x - y - 2z = 0$?

5. Найти производную в направлении $\vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ функции $z = \ln\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)$ в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$.

Найти модуль градиента этой функции в точке M_0. В направлении какого вектора скорость роста функции наибольшая?

6. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - xy - x$.

7. Вычислить приближённо $\mathrm{arctg}\dfrac{1{,}01}{0{,}94}$.

Требования по выполнению заданий контрольной работы по номерам:

1 – 7. Ко всем заданиям должно быть приведено решение, приводящее к верному ответу.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные решения более 5 задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные решения 5 задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные решения 4 задач.

Индивидуальное задание № 1 (выполняется в рамках СРС, даются различные варианты, должно быть представлено полное решение, с использованием указанного метода. Проверяются ИОПК-1.3., ИОПК 1.2, ИОПК 1.1)

ВАРИАНТ 1.

1. Исследовать на экстремум функцию $u = (5 - 2x + y)\, e^{x^2 - y}$.

2. Исследовать на экстремум функцию, применяя метод Лагранжа:
$u = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$, при доп. условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 21$, $3x + 2y + z = 0$.

Результаты индивидуального задания определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если полностью исследованы на экстремумобе функции.

Оценка «хорошо» выставляется, если одна функция исследована полностью, во другой найдены все критические точки, но есть недоработке при проверке их на экстремум.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если есть недоработки в обоих заданиях, но в обоих случаях показана верная последовательность действий при исследовании на экстремум.

В остальных случаях – оценка «Неудовлетворительно».

Контрольная работа №3 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

ВАРИАНТ 1.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+5}{4n+1}\right)^n$.

Требования по выполнению: приведены рассуждения, содержащие необходимые формулировки признаков сходимости и приводящие к верному ответу.
Засчитывается только правильно выполненное задание. Оценка: «Зачет» или «Незачет».

III семестр обучения

Контрольная работа №1 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

ВАРИАНТ 1.

1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$

2. Найти область абсолютной и условной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x+\sqrt{n}}$

3. Разложить по степеням x функцию $\int\limits_0^x \frac{t-\sin(t)}{t^3}dt$

4. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x) = x^n(1-2x)$ на отрезке $[0;1]$, построить графики $f_1, f_2, f = \lim f_n$.

5.(*) Может ли последовательность разрывных функций сходится равномерно к непрерывной функции?

6. Разложить $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ в ряд Маклорена. Найти радиус сходимости этого ряда.

7. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+x^4}}$ с помощью признака Вейерштрасса на множестве $\mathbb{R}$.

8. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2+x}$ на множестве $[0;+\infty)$.

Требования по выполнению заданий контрольной работы по номерам:

1, 2, 3, 6, 8. К этим заданиям должно быть приведено решение, приводящее к верному ответу.

4. Должно быть приведено решение и пострены графики указанных функций (вручную).

5. Должен быть дан правильный ответ (положительный) путем построения подтверждающего примера.

7. Должно быть приведенодоказавтельство с верным применением признака Вейерштрасса.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные решения более 5 задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные решения 5 задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные решения 4 задач.

Коллоквиум (проводится на двух практических занятии, проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 1.3, ИОПК 8.1., ИОПК 8.2) .

Темы для обсуждения: 1. Мера бруса в $\mathbb{R}^n$. 2. Сформулировать и доказать лемму о представлении открытого множества в виде объединения семейства непересекающихся брусов. 3. Мера открытого множества в $\mathbb{R}^n$. 4. Внешняя мера множества в $\mathbb{R}^n$. 5. Измеримые множества. 6. Показать, что совокупность всех измеримых множеств в $\mathbb{R}^n$ образует сигма-алгебру. 7. Критерий измеримого множества в $\mathbb{R}^n$, использующий замкнутые множества. 8. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. 9. Свойства меры Лебега. 10. Теорема об инвариантности меры Лебега относительно изометрии. 11. Теорему о структуре измеримого по Лебегу множества в $\mathbb{R}^n$.12.Определения полукольца, кольца, алгебры, σ-алгебры множеств, меры, пространства с мерой. Непрерывность меры. 13. Определения непрерывного пространства с мерой, полного по Лебегу пространства с мерой. 14. Определение измеримого отображения, теорема об условиях, эквивалентных измеримости. 15. Измеримость max и min двух измеримых функций, sup, inf, предела последовательности измеримых функций. 16. Теорема о измеримости композиции функций. 17. Определение простой функции, интеграла Лебега от простой функции. 18. Теоремы об интеграле от суммы неотрицательных простых функций и о монотонности интеграла от неотрицательных простых функций. 19. Определение и свойства интеграла Лебега от неотрицательной измеримой функции. 20. Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. 21. Теоремы об интегрируемости суммы и ряда измеримых неотрицательных функций. 22. Теоремы о счетной аддитивности интеграла и о нулевом интеграле от неотрицательной функции. 23. Определение и свойства интеграла Лебега от измеримой функции. Определить суммируемые функции. 24. Теоремы о монотонности интеграла Лебега, интегрировании по подмножеству, о мажоранте.25. Теоремы о счетной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега. 26. Теорема о линейности интеграла Лебега. 27. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. 28. Определение и свойства эквивалентных (равных почти всюду) функций.

Результаты коллоквиума определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» по итогам двух занятий.

Оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» может быть выставлена только при наличии у студента личных конспектов с ответами на указанные темы и указанием литературы, которая была использована при подготовке конспектов.

Оценка «отлично» выставляется, если студент на одном из занятий показал знания в выбранной случайным образом теме, выходящие за пределы содержания лекций (самостоятельные доказательства отдельных результатов), на другом занятии также участвовал в обсуждении тем.

Оценка «хорошо» выставляется, если студент показал на одном из занятий знания в выбранной случайным образом теме, не выходящие за рамки доказанного на лекциях, на другом занятии также участвовал в обсуждении тем.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент показал на обоих занятиях знания в терминах и фактах выбранной случайным образом темы, но не сумел довести до конца необходимые доказательства, которые были приведены на лекциях.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется, если студент не смог дать определения, необходимые для обсуждения выбранной случайным образом темы, на одном из занятий.

Контрольная работа №2 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

ВАРИАНТ 1.

1. Найти площадь, ограниченную линиями:

1) $x^2+y^2=4y;\quad 2y\ge x^2$;

2) $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$; 3) $x=4\sqrt{2}\cos^3 t,\quad y=\sqrt{2}\sin^3 t$.

2. Найти длину дуги кривой:

1) $y=\ln\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right),\quad 0\le a\le x\le b;$ 2) ; $\rho=2a\sin\varphi$ 3) $x=\cos^4 t,\ \ y=\sin^4 t,\ \ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

3.Найти объём тела вращения, ограниченного крывыми $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-3}}$, $y=0$, при $-1\le x\le 1$, вокруг оси Ox.

4. Исследовать интеграл на сходимость: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

5. Исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимость: $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{(x-1)\cos 3x}{x^2-4x+5}\,dx$.

Требования по выполнению заданий контрольной работы по номерам:

1, 3. Должно быть приведено решение, содержащее чертеж и приводящее к верному ответу.

2. Должно быть приведено решение, содержащее формулу для длины дуги и приводящее к верному ответу.

4, 5. Должно быть приведено решение, содержащее формулировки используемых признаков сходимости интеграла и их применение в данном случае.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные решения хотя бы по одному из заданий 1, 2 , а также решения заданий 3, 4, 5.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные решения хотя бы по одному из заданий 1, 2 , а также решения заданий 3, 4 или 5.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные решения хотя бы по одному из заданий 1, 2, а также решения заданий 3 или 4 или 5.

Контрольная работа №3 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

ВАРИАНТ 1.

1. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y} f\left(x, y\right) dx$.

2. Найти $\iint\limits_D \left(2 + x - y\right) dxdy$, где $D:\ x^2 + y^2 \geq 1,\quad x^2 + y^2 \leq 9,\quad y \geq x,\ y \leq \sqrt{3}x$.

3. Найти $\iint\limits_D \frac{x}{y} dxdy$, множество D ограничено кривыми: $y = x^2, 8y = x^2, x = y^2, 8x = y^2$.

4. Найти объем, ограниченный поверхностями: $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

5. Вычислить $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, если $G = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\right\}$.

Требования по выполнению заданий контрольной работы по номерам:

1. Должен быть приведен чертед двумерной области интегрирования, записан переход в полярные координаты и выполнены необходимые действия для преобразования интеграла.

2 – 5. К этим заданиям должно быть приведено решение, содержащее чертеж области интегрирования и приводящее к верному ответу. При необходимости должна быть сделана замена переменных.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные решения задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные решения 4х задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные решения 3х задач.

IV семестр обучения

Контрольная работа №1 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

1. Найти $\int\limits_\Gamma xdy$, Г – верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$ от т.$A(-a,0)$ до т. $B(a,0)$.

2. Вычислить: $\int\limits_L \frac{y}{e^x} dl$, где кривая $L:\ \begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right), \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t, \end{cases} \quad t \in \left[0, 1\right]$.

3. Вычислить: $\int\limits_L \left(xy + x + y\right)dx + \left(xy + x - y\right)dy$, где L – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. Вычислить $\iint\limits_S z^2 dS$, если $S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, x = y\right\}$.

5. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Требования по выполнению заданий контрольной работы:

Ко всем заданиям должно быть приведено решение, содержащее параметризацию (карту) области интегрирования и приводящее к верному ответу. При необходимости должна быть сделана подходящая замена переменных.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные решения всех 5 задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные решения 4 задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные решения 3 задач.

Коллоквиум (проводится на двух практических занятии, проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 1.3, ИОПК 8.1., ИОПК 8.2)

Темы для обсуждения: 1. Многообразие без края. 2. Карты и атласы многообразия без края. 3. Многообразие с краем. Край многообразия. Карты и атласы многообразия с краем. 4. Гладкие карты, атласы и многообразия. 5. Функция перехода. 6. Касательное пространство к гладкому многообразию. 7. Определение меры Лебега на гладком многообразии произвольной размерности. 8. Общее определение интеграла Лебега по неотрицательной мере. Интеграл 1-го рода по многообразию. 9. Базисы одной ориентации в пространстве. Ориентированное евклидово пространство. 10. Согласованные карты многообразия. Ориентирующий атлас. Ориентируемое многообразие. Ориентированное многообразие. 11. Критерий согласованности гладких карт (через якобиан функции перехода). 12. Теорема о поле нормалей, определяемом гладкой картой. 14. Теоремы о крае гладкого многообразия. Определение ориентации края, согласованной с ориентацией всего многообразия. 15. Внешнее произведение линейных функционалов. 16. Кососимметрические полилинейные формы. Определение и свойства. 17. Внешнее произведение дифференциалов независимых переменных. Его геометрический смысл. 18. Пространство $\wedge^p(\mathbb{R}^n)$. Общий вид $\Phi\in\wedge^p(\mathbb{R}^n)$. 19. Дифференциальная форма степени $p\geqslant 0$ на открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^n$.

Результаты коллоквиума определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» по итогам двух занятий.

Оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» может быть выставлена только при наличии у студента личных конспектов с ответами на указанные темы и указанием литературы, которая была использована при подготовке конспектов.

Оценка «отлично» выставляется, если студент на одном из занятий показал знания в выбранной случайным образом теме, выходящие за пределы содержания лекций (самостоятельные доказательства отдельных результатов).

Оценка «хорошо» выставляется, если студент показал на одном из занятий знания в выбранной случайным образом теме, не выходящие за рамки доказанного на лекциях.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент показал на одном из занятий знания в терминах и фактах выбранной случайным образом темы, но не сумел довести до конца необходимые доказательства, которые были приведены на лекциях.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется, если студент не смог дать определения, необходимые для обсуждения выбранной случайным образом темы, ни на одном из занятий.

Контрольная работа №2 (выполняется на практическом занятии, даются различные варианты, проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3.)

1. Найти $\int\limits_{(0,0)}^{(2,4)} -3x^2dx + y^3dy$ (проверить независимость от пути интегрирования).

2.Доказать, что $\int\limits_C \frac{dx+dy+dz}{x+y+z} = 0$ по любому замкнутому контуру C, не пересекающему плоскость $x+y+z=0$.

3.Найти поток поля $\overline{F} = (x^2z^2 - x^2y^2)\overline{i} + (3xy^2z^2 - 2xyz^2)\overline{j} + (2xy^2z - 2xyz^3)\overline{k}$

через внешнюю сторону поверхности $S = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 4$.

4.Пользуясь формулой Стокса, вычислить: $\int\limits_C \left(y-z\right)dx + \left(z-x\right)dy + \left(x-y\right)dz$, где

$C = \left\{x^2+y^2=1,\ x+z=1\right\}$

5. Пользуясь формулой Гаусса-Остроградского, вычислить $\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz$, S – внешняя сторона поверхности, огр. множество $x^2 + y^2 \le R^2$, $z \ge 0, z \le h$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Требования по выполнению заданий контрольной работы:

Ко всем заданиям должно быть приведено решение, содержащее необходимые формулы и приводящее к верному ответу. При необходимости должна быть сделана подходящая замена переменных.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные решения всех задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные решения 4х задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны правильные решения 3х задач.

Индивидуальное задание № 1 (выполняется в рамках СРС, даются различные варианты, должно быть представлено полное решение, с построением графика вручную, если это указано в задании. Проверяются ИОПК-1.3., ИОПК 1.2, ИОПК 1.1)

ВАРИАНТ 1.

1. Разложить на интервале $(-\pi, \pi)$ в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos(x/2)$. Построить график суммы полученного ряда. Записать для этого ряда равенство Парсеваля.
2. Представить интегралом Фурье функцию, продолжая ее нечетным образом на $(-\infty, 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Результаты индивидуального задания определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, полностью сделаны оба задания.

Оценка «хорошо» выставляется, если есть недочеты в одном или обоих заданиях, но общий ход действий и рассуждений верен в обоих задания.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если хотя бы одно из двух заданий выполнено полностью либо с небольшими недочетами, с верным ходом действий и рассуждений.

В остальных случаях – оценка «Неудовлетворительно».

Индивидуальное задание № 2 (выполняется в рамках СРС, даются различные варианты, должно быть представлено полное решение, с построением графика вручную, если это указано в задании. Проверяются ИОПК-1.3., ИОПК 1.2, ИОПК 1.1)

1. Вычислить: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\alpha^2 + x^2\right)}{\beta^2 + x^2}dx$. 2. Найти: $\int\limits_a^{a+1} \ln\Gamma\left(x\right)dx$, $a > 0$.

Результаты индивидуального задания определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, полностью сделаны оба задания.

Оценка «хорошо» выставляется, если есть недочеты или неполное решение в одном или обоих заданиях, но общий ход действий и рассуждений верен в обоих задания.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если хотя бы одно из двух заданий выполнено полностью либо с небольшими недочетами, с верным ходом действий и рассуждений.

В остальных случаях – оценка «Неудовлетворительно».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Промежуточная аттестация реализуется путем проведения экзаменов после каждого семестра.

К экзамену студент должен получить оценку за практическую часть курса, которая вычисляется как среднее арифметическое оценок за контрольные и индивидуальные задания, округляется по математическим правилам. При этом если какая-то контрольная не выполнялась студентом совсем или индивидуальное задание выполнено на «Не зачтено» , то оценка за практику – 2.

Вопросы по практике (задачи) направлены на оценку сформированности по индикатору компетенции ИОПК 1.2 (решение типовых задач из курса математического анализа).

Вопросы по теории проверяют сформированность по индикаторам ИОПК 1.1, ИОПК 8.1 и ИОПК 8.2 (знание литературы по математическому анализу, умение восстанавливать недостающие факты и рассуждения по литературе, подготовить план ответа) , а также ИОПК 1.3 (владение фундаментальными знаниями, включая определения, формулировки и методы доказательства теорем из курса математического анализа, умение применить эти знания в конкретной ситуации).

Студенты, получившие по практике оценки 3, 4, 5, освобождаются от практической части билета со своей оценкой. Итоговая оценка за экзамен получается как среднее арифметическое оценок за практику и теорию, с округлением в сторону оценки за теорию. Если был сдан коллоквиум по теоретическому разделу, выносимому на экзамен, то студент освобождается на экзамене от вопросов по данному разделу с той оценкой, какая была за коллоквиум. В экзаменационном билете должны присутствовать вопросы по практике и теории по основным пройденным темам.
Количество вопросов зависит от их трудоемкости, не более трех вопросов по практике и трех вопросов по теории. За каждый вопрос билета должна быть получена оценка не ниже тройки. Оценка за ответ по теории на экзамене находится как среднее арифметическое ответов по каждому вопросу. При спорной оценке задаётся дополнительный вопрос.
Критерий оценивания ответа на экзамене (на подготовку и ответ на экзамене отводится 1,5 академического часа):
Критерий оценки вопроса на экзамене:

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
означает неспособность студента математически верно сформулировать определения или результаты, требуемые в вопросе.	означает неспособность студента привести доказательства верно сформулированных результатов и неумение применить сформулированные определения и результаты к конкретной ситуации.	означает способность студента верно сформулировать результат и привести отдельные части доказательства или решения при не способности построить логическую цепочку доказательства (решения задачи) без дополнительных указаний.	означает способность студента привести доказательства верно сформулированных результатов или умение применить сформулированные определения и результаты к конкретной ситуации, делать необходимые обобщения и выводы.

Примерный перечень теоретических вопросов, выносимых на экзамены:
I семестр.
Первый вопрос билета.
1.Определить основные операции над множествами. Записать и доказать формулы двойственности де Моргана для трех множеств. Нарисовать к этим формулам диаграммы Венна – Эйлера.
2. Дать определение семейства множеств, объединения и пересечения множеств семейства. Привести примеры. Записать и доказать формулы двойственности де Моргана для семейства множеств.
3. Дать определение соответствия и отображения. Определить образ и прообраз множества при отображении. Сформулировать и доказать теорему о свойствах образов и прообразов множеств.
4. Дать определения инъекции, сюръекции, биекции. Сформулировать и доказать критерий биекции. Дать определение обратного отображения. Привести пример.
5. Дать определение композиции отображений. Привести примеры: композиция определена, композиция не определена. В каких случаях композиция двух отображений дает тождественное отображение
6. Перечислить группы аксиом, определяющие множество вещественных чисел. Используя аксиомы, доказать правило умножения неравенства на отрицательное число.

7. Дать определение точной нижней и точной верхней грани числового множества. Сформулировать и доказать теорему о существовании точных граней. Привести пример.
8. Дать определение индуктивного подмножества вещественных чисел. Определить множество натуральных чисел. Сформулировать и доказать принцип математической индукции. Привести пример его применения.
9. Сформулировать и доказать формулу Бинома Ньютона. Записать несколько строк треугольника Паскаля и объяснить, из какой формулы следует его построение.
10. Определить множество целых чисел как подмножество вещественных чисел. Сформулировать и доказать принцип Архимеда. Дать определение целой и дробной части числа. Привести примеры.
11. Определить множество рациональных чисел. Сформулировать и доказать свойство плотности рациональных чисел во множестве вещественных чисел. Привести пример применения этого свойства.
12. Сформулировать и доказать теорему о существовании арифметического корня из положительного вещественного числа. Объяснить, как определяется вещественная степень вещественного числа.
13. Дать определение конечного и счетного множества. Доказать, что множество рациональных чисел счетно. Привести другие примеры счетных множеств.
14. Дать определение счетного и континуального множества. Доказать, что отрезок [0;1] не является счетным множеством. Привести другие примеры континуальных множеств.

Второй вопрос билета.

1. Дать определение предела числовой последовательности. Сформулировать и доказать теоремы о единственности предела и ограниченности сходящейся последовательности. Привести примеры.
2. Дать определение бесконечно малой последовательности. Сформулировать и доказать теоремы о свойствах бесконечно малых последовательностей и о связи б.м. последовательностей и сходящихся последовательностей. Привести примеры.
3. Сформулировать и доказать теорему об арифметических действиях с последовательностями. Привести примеры применения этой теоремы.
4. Сформулировать и доказать теоремы о переходе к пределу в неравенстве для последовательностей и о трех последовательностях. Привести пример применения теоремы о трех последовательностях.
5. Дать определение бесконечно большой числовой последовательности. Рассмотреть разные случаи. Привести примеры. Сформулировать и доказать теорему о связи б.б. и б.м. последовательностей.
6. Дать определение монотонной последовательности. Сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса о монотонных последовательностях. Привести пример применения этой теоремы.
7. Задать последовательность, предел которой обозначается через e. Доказать сходимость этой последовательности. Получить следствия из этого предела. Какая неопределенность здесь возникает?
8. Дать определение подпоследовательности. Сформулировать и доказать теорему о сходимости подпоследовательностей. Привести примеры применения этой теоремы.
9. Сформулировать и доказать лемму Кантора о вложенных отрезках и теорему Больцано – Вейерштрасса об ограниченных последовательностях.
10. Дать определение фундаментальной последовательности. Сформулировать и доказать критерий Коши сходимости числовых последовательностей. Привести примеры.
11. Дать определение предельной точки числового множества. Сформулировать и доказать критерий предельной точки. Привести примеры.
12. Дать определения предела функции по Коши и по Гейне. Сформулировать и доказать теорему об эквивалентности этих определений. Привести примеры.

13. Сформулировать и доказать теоремы о единственности предела функции, локальной ограниченности, локальном сохранении знака функцией, имеющей предел, а также теорему о трех функциях.
14. Сформулировать и доказать теорему о замене переменной под знаком предела. Привести примеры применения этой теоремы.
15. Сформулировать и доказать теорему об арифметических операциях с пределами функций. Привести примеры применения этой теоремы.
16. Дать определение бесконечно малой функции при x, стремящемся к x_0. Сформулировать и доказать теоремы о свойствах бесконечно малых функций. Привести примеры.
17. Дать определение бесконечно большой функции при x, стремящемся к x_0. Рассмотреть различные случаи. Сформулировать и доказать теорему о связи б.б. и б.м. функций. Привести примеры.
18. Перечислить известные Вам неопределенности, возникающие при нахождении пределов. Сформулировать и доказать теоремы о том, что $\infty\cdot\infty = \infty$, $0/\infty = 0$. Привести примеры.
19. Дать определение односторонних пределов при x, стремящемся к x_0 и при x, стремящемся к ∞. Сформулировать и доказать теоремы о равенстве односторонних пределов в обоих случаях.
20. Записать «первый замечательный предел» и доказать это равенство. Получить следствия из этого предела.
21. Записать «второй замечательный предел» и доказать это равенство. Получить следствия из этого предела.
23. Дать определение эквивалентных функций при x, стремящемся к x_0.. Сформулировать и доказать теоремы о свойствах эквивалентных функций и о применении эквивалентных функций для нахождения пределов. Привести примеры.
24. Дать определение бесконечно малой функции по сравнению с другой функцией при x, стремящемся к x_0. Сформулировать и доказать критерий эквивалентных функций. Дать определение главной части функции при x, стремящемся к x_0. Привести примеры.
25. Дать определение функции, ограниченной по сравнению с другой функцией при x, стремящемся к x_0. Сформулировать и доказать теорему о связи предела отношения функции с этим понятием.
26. Дать определение бесконечно малой функции по сравнению с другой функцией при x, стремящемся к $+\infty$. Привести примеры таких функций (с доказательствами).
27. Сформулировать и доказать различные варианты о пределе монотонной функции. Привести примеры.
28. Сформулировать и доказать различные варианты критерия Коши существования предела функции. Привести пример применения этой теоремы.

Третий вопрос билета.

1. Дать определение непрерывной функции в точке. Сформулировать и доказать критерий Гейне непрерывности функции в точке. Привести примеры непрерывных и разрывных функций.
2. Сформулировать и доказать теорему о сохранении непрерывности при арифметических действиях. Привести примеры применения этой теоремы.
3. Сформулировать и доказать теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций и о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Привести примеры.
4. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности монотонной сюръекции, заданной на отрезке. Доказать непрерывность степенной и показательной функции на их областях определения.
5. Сформулировать и доказать теорему Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке. Как эта теорема используется при решении неравенств методом интервалов?

6. Сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса о достижении точных граней непрерывной функцией на отрезке. Привести примеры функций, заданных на отрезке и на интервале.
7. Сформулировать и доказать теорему о существовании и непрерывности обратного отображения для строго монотонной функции. Непрерывность каких элементарных функций следует их этой теоремы? Доказать непрерывность логарифмической функции на ее области определения.
8. Дать определение непрерывной функции и равномерно непрерывной функции на множестве. Показать, чем отличаются эти понятия. Привести примеры.
9. Сформулировать и доказать теорему Гейне – Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на отрезке.
10. Дать определение производной и дифференциала функции в точке. Привести пример. Сформулировать и доказать теоремы о связи производной и дифференциала и о непрерывности дифференцируемой функции.
11. Сформулировать и доказать теорему о производных при арифметических действиях. Какие производные из таблицы получаются с помощью этой теоремы? Получить их.
12. Сформулировать и доказать теорему о производной композиции функций. Привести пример применения этой теоремы для композиции трех функций.
13. Сформулировать и доказать теорему о производной обратной функции. Какие производные из таблицы получаются с помощью этой теоремы? Получить их.
14. Дать определения наклонной и вертикальной асимптоты к графику функции. Сформулировать и доказать теорему о нахождении наклонной асимптоты.
15. Дать определение k-й производной от функции в точке. Сформулировать правило Лейбница для нахождения k-й производной от произведения двух функций. Записать формулы для третьей, четвертой производной от произведения двух функций.
16. Дать определение точки локального экстремума и строгого локального экстремума функции. Сформулировать и доказать теорему Ферма и теорему Ролля.
17. Сформулировать и доказать теорему о формуле конечных приращений Коши. Получить из нее формулу конечных приращений Лагранжа. Привести пример применения этой формулы.
18. Сформулировать и доказать теорему о правиле Лопиталя для случая 0/0. Сформулировать теорему для случая ∞/∞. Привести примеры применения правила Лопиталя и случая, когда оно не применимо.
19. Записать многочлен Тейлора порядка n для функции в точке x_0. Доказать первое определяющее многочлен Тейлора свойство: совпадение производных до порядка n с производными функции в точке x_0.
20. Записать многочлен Тейлора порядка n для функции в точке x_0. Доказать второе определяющее свойство, то есть получить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
21. Сформулировать и доказать теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Привести пример применения этой теоремы.
22. Получить разложения по формуле Маклорена пяти основных бесконечно дифференцируемых функций.
23. Сформулировать и доказать теорему о связи знаки производной с монотонностью функции, а также первое достаточное условие экстремума. Привести пример.
24. Сформулировать и доказать второе достаточное условие экстремума. Привести пример применения этой теоремы.
25. Дать определение выпуклой вверх [вниз] функции на интервале. Сформулировать и доказать теорему о связи направления выпуклости и второй производной функции. Привести пример.

26. Дать определение точки перегиба функции. Сформулировать и доказать теорему о направлении выпуклости и касательной к графику функции. Описать геометрический смысл точки перегиба.
27. Сформулировать и доказать теоремы о непрерывности и дифференцировании параметрически заданной функции. Получить формулу для второй производной в этом случае. Привести пример.

II семестр.

Первый вопрос билета.

1. Определение первообразной для функции на отрезке. Теорема о разности первообразных. Свойства первообразных. Таблица первообразных основных элементарных функций.
2. Теорема об интегрировании подстановкой. Замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
3. Теорема об интегрировании по частям. Пример рекуррентной интегральной формулы. Пример циклического интеграла.
4. Интегрирование дробно-рациональных функций. Описать метод, привести пример.
5. Интегральные суммы Римана и Дарбу. Определение интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости. Свойства сумм Дарбу.
6. Теорема о существовании интеграла Римана от непрерывной функции на отрезке. Пример вычисления интеграла Римана от непрерывной функции без формулы Ньютона – Лейбница.
7. Интеграл с переменным верхним пределом и первообразная функции на отрезке. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Числовой ряд, частичные суммы ряда, необходимое условие сходимости числового ряда. Свойства остатков числового ряда. Примеры сходящихся рядов.
9. Критерий Коши сходимости числового ряда. Примеры теорем, в доказательстве которых применяется критерий Коши.
10. Первый и второй признаки сравнения для рядов с неотрицательными членами. Примеры: когда эти признаки применимы, а когда – не применимы.
11. Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с неотрицательными членами. Примеры их применения.
12. Интегральный признак сходимости для рядов с неотрицательными членами. Сходимость обобщенного гармонического ряда.
13. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Теорема о перестановках членов абсолютно сходящегося ряда.
14. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.
15. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Оценка остатка ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница.
16. Признак Дирихле сходимости знакопеременного ряда. Разобрать пример.
17. Признак Абеля сходимости знакопеременного ряда. Примеры рядов, сходящихся по признаку Абеля.
18. Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда. Привести пример сходящегося ряда, который после перестановки становится расходящимся.
19. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Приведите примеры равномерно и неравномерно сходящихся функциональных последовательностей.
20. Теорема о равномерном пределе последовательности непрерывных функций. Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности.
21. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональной последовательности. Привести пример применения одной из теорем.

22. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
23. Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда. Разобрать пример.
24. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Приведите пример ряда, который сходится равномерно на отрезке по признаку Абеля.
25. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда. Привести примеры применения этих теорем.

Второй вопрос билета

1. Линейное отображение $A:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, его матрица. Доказать существование нормы оператора $A\,\|A\| = \sup\left\{\|A(x)\|, \|x\| \le 1, x \in \mathbb{R}^n\right\}$ и равномерную непрерывность отображения A.

2. Отображение, бесконечно малое по сравнению с другим отображением при $x \to x_0$. Дать определение, сформулировать критерий $o\left(\|x - x_0\|\right)$, $x \to x_0$.

3. Определение дифференциала отображения в точке. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Примеры дифференцируемых и не дифференцируемых отображений.

4. Теоремы о покомпонентной непрерывности и покомпонентной дифференцируемости отображений $f: G \to \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^m$. Привести примеры.

5. Определение частной производной отображения $f: G \to \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^m$ в точке. Связь существования частной производных и дифференциала.

6. Теорема о дифференцировании композиции отображений. Идея инвариантности формы первого дифференциала. Привести примеры.

7. Теорема о дифференцировании обратного отображения. Матрица Якоби и якобиан обратного отображения. Привести пример.

8. Формулы конечных приращений для отображений. Показать различие между случаями $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$ и $f: G \to \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^m$.

9. Производная по направлению и градиент функции $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$ в точке $x_0 \in G$. Свойства градиента. Касательная плоскость к графику функции $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

10. Частная производная второго и высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Привести пример. Дифференциал второго порядка для $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$.

11. Формула Тейлора для вещественной функции нескольких переменных. Теоремы о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано.

12. Точки локального экстремума отображения $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$. Первое необходимое условие экстремума.

13. Квадратичные формы. Типы квадратичных форм. Второе необходимое условие экстремума функции $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$.

14. Достаточные условия строгого локального экстремума отображения $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^m$. Критерий Сильвестра. Привести пример.

15. Определение неявной функции $f: U(x_0, \delta) \to U(y_0, \varepsilon)$, $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}$, заданной условием $F(x, y) = 0$ в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. Привести примеры.

16. Определение неявной функции $f: U(x_0, \delta) \to U(y_0, \varepsilon)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}$, заданной условием $F(x, y) = 0$ в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Привести примеры.

17. Теорема о существовании и единственности непрерывной неявной функции в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. Привести свой пример применения этой теоремы.

18. Теорема о дифференцируемости неявной функции в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. Привести свой пример нахождения дифференциала неявной функции.

19. Теорема о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости неявной функции в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Привести свой пример применения этой теоремы.

20. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной функции в окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Привести свой пример применения этой теоремы.

21. Теорема о локальном существование и дифференцируемости обратного отображения. Привести свой пример применения этой теоремы.

III семестр.

Первый вопрос билета.

1. Мера Лебега бруса и открытого множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать сигма-аддитивность отображения меры Лебега на семействе открытых множеств в $\mathbb{R}^n$.
2. Внешняя мера множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать теорему о счетной полуаддитивности внешней меры.
3. Измеримые по Лебегу множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать измеримость открытых и замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$.
4. Показать, что совокупность всех измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$ образует сигма-алгебру.
5. Сформулировать и доказать критерий измеримого по Лебегу множества в $\mathbb{R}^n$, использующий замкнутые множества.
6. Сформулировать и доказать свойства меры Лебега: сигма-аддитивность, полнота, регулярность.
7. Сформулировать и доказать теорему о структуре измеримого по Лебегу множества в $\mathbb{R}^n$.
8. Сформулировать теорему об инвариантности меры Лебега относительно изометрии. Привести примеры изометрий и показать, как применяется эта теорема.
9. Дать определение сигма-алгебры множеств. Сформулировать и доказать теорему о пересечении семейства сигма-алгебр. Рассмотреть пример: борелевская сигма-алгебра.
10. Сформулировать определение и доказать свойства произвольной неотрицательной меры, в том числе теорему о непрерывности меры.
11. Дать определение измеримой функции, доказать теорему об условиях, эквивалентных измеримости, и следствие из неё. Привести пример неизмеримой функции.
12. Доказать измеримость sup, inf, предела последовательности измеримых функций.
13. Сформулировать и доказать теорему о измеримости композиции функций. Сформулировать и доказать следствия: измеримость при арифметических действиях.
14. Дать определение простой функции, интеграла Лебега от простой функции. Сформулировать и доказать свойства этого интеграла, в том числе теорему о счетной аддитивности интеграла от простой функции.
15. Доказать теоремы об интеграле от суммы неотрицательных простых функций и о монотонности интеграла от неотрицательных простых функций.

16. Дать определение интеграла Лебега от неотрицательной измеримой функции. Сформулировать и доказать его свойства.
17. Сформулировать и доказать теорему Б. Леви о монотонной сходимости. Привести примеры применения этой теоремы.
18. Сформулировать и доказать теоремы об интегрируемости суммы и ряда измеримых неотрицательных функций.
19. Сформулировать и доказать теоремы о счетной аддитивности интеграла и о нулевом интеграле от неотрицательной функции. Привести примеры применения этих теорем.
20. Дать определение интеграла Лебега от измеримой функции. Определить суммируемые функции. Сформулировать и доказать теоремы о связи интеграла от функции и интеграла от её модуля.
21. Сформулировать и доказать теоремы о монотонности интеграла Лебега, интегрировании по подмножеству, о мажоранте.
22. Сформулировать и доказать теоремы о счетной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега.
23. Сформулировать и доказать теорему о линейности интеграла Лебега.
24. Сформулировать и доказать теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Привести пример ее применения.
25. Дать определение эквивалентных (равных почти всюду) функций. Сформулировать и доказать свойства таких функций. Какие теоремы об интеграле Лебега можно сформулировать с понятием «почти всюду»?
26. Сформулировать и доказать критерий Лебега интегрируемости функции по Риману на отрезке прямой.
27. Сформулировать и доказать теорему о связи интегралов Римана и Лебега на отрезке.
28. Сформулировать и доказать свойства интеграла с переменным верхним пределом и формулу Ньютона-Лейбница.
29. Сформулировать и доказать теоремы о замене переменной в определенном интеграле и об интегрировании по частям.
30. Сформулировать и доказать первую теорему о среднем для интеграла на отрезке и следствия из нее.
31. Сформулировать теорему о формулах Боннэ. Доказать её в одном случае. Привести геометрический смысл этих формул.
32. Доказать теорему об интегральной форме остаточного члена в формуле Тейлора.
33. Дать определение несобственного интеграла первого и второго рода. Привести примеры сходящихся и расходящихся интегралов.
34. Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Доказать теорему о связи с интегралом Лебега и мажорантный признак абсолютной сходимости.
35. Сформулировать и доказать признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственного интеграла. Привести примеры их применения.

Второй вопрос билета

1. Сформулировать теорему о неявном отображении. Привести примеры.
2. Сформулировать и доказать теорему о локальной обратимости отображения. Сформулировать и доказать принцип сохранения области.
3. Дать два определения диффеоморфизма: 1) без использования якобиана, 2) с использование якобиана. Привести примеры диффеоморфизмов и не диффеоморфизмов нескольких переменных.
4. Дать определение зависимых и независимых систем функций. Привести примеры. Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии зависимости и следствия.
5. Дать определение зависимых и независимых систем функций. Сформулировать теорему о достаточных условиях локальной независимости и зависимости. Привести схему доказательства.

6. Дать определение условного экстремума. Описать прямой метод нахождения условного экстремума. Привести примеры: 1) прямой метод работает, 2) прямой метод не работает.

7. Описать метод Лагранжа нахождения условного экстремума. Сформулировать и доказать теорему необходимых условиях условного экстремума. Сформулировать теорему о достаточных условиях условного экстремума.

8. Дать определение сечения множества в $\mathbb{R}^n$. Сформулировать теорему о сечениях измеримого множества. Описать этапы доказательства. Разобрать этап, где появляется «почти всюду». Доказать последний этап.

9. Сформулировать и доказать теоремы о измеримости и мере декартового произведения и о подграфике измеримой функции. Привести пример нахождения меры подграфика.

10. Сформулировать и доказать теорему Фубини для функции $f:\mathbb{R}^{p+q}\to[0;+\infty]$. Привести вторую, симметричную, формулировку. Привести пример.

11. Сформулировать и доказать теорему Фубини для функции $f:\mathbb{R}^{p+q}\to[-\infty;+\infty]$. Привести вторую, симметричную, формулировку. Привести пример.

12. Сформулировать и доказать теорему Фубини для функции $f:A\to[-\infty;+\infty]$. Привести вторую, симметричную, формулировку. Привести пример.

13. Дать определение диффеоморфизма. Сформулировать и доказать теорему о локальном разложении диффеоморфизма. Сформулировать другие результаты о диффеоморфизмах: измеримость $\hat{\Psi}\chi_P$, мера прообраза нульмерного множества при диффеоморфизме.

14. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Доказать её для характеристической функции бруса и отдельных видов диффеоморфизмов.

15. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Сформулировать и доказать теорему о редукции к неотрицательной функции и ограниченному множеству.

16. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Сформулировать и доказать теорему о редукции при разложении диффеоморфизма на композицию диффеоморфизмов.

17. Дать определение ступенчатой функции. Сформулировать леммы о приближении простой и измеримой функции ступенчатыми функциями. Пояснить роль этих лемм в доказательстве теоремы о замене.

18. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Сформулировать и доказать теорему о редукции к характеристической функции бруса.

19. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Доказать эту теорему для характеристической функции бруса индукцией по размерности пространства.

20. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Сформулировать и доказать обобщения этой теоремы.

21. Сформулировать и доказать следствия теоремы о замене: мера образа множества при диффеоморфизме, геометрический смысл якобиана.

22. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Рассмотреть примеры с использованием полярной и сферической систем координат.

23. Сформулировать теорему о замене переменной в интеграле Лебега. Рассмотреть пример с использованием нестандартной замены переменных для двух переменных.

IV семестр.

Первый вопрос билета

1. Многообразие без края. Определение и примеры: открытые множества, графики непрерывных отображений, кривые и поверхности 2-го порядка, тор, винтовая линия в пространстве $\mathbb{R}^3$ и др.
2. Карты и атласы многообразия без края. Определение и простые примеры.
3. Карта, порождающая полярные координаты на плоскости. Карты, порождающие цилиндрические и сферические координаты в пространстве $\mathbb{R}^3$.
4. Примеры карт на сфере пространства $\mathbb{R}^3$.
5. Многообразие с краем. Край многообразия. Карты и атласы многообразия с краем. Определения и примеры.
6. Гладкие карты, атласы и многообразия. Определения и примеры.
7. Функция перехода. Определение и примеры. Теорема о функции перехода.
8. Касательное пространство к гладкому многообразию. Касательное пространство к графику непрерывно дифференцируемого отображения $f{:}G\to\mathbb{R}^m$, где $G\subset\mathbb{R}^n$.
9. Теорема о поверхности уровня отображения $f{:}G\to\mathbb{R}^m, G\subset\mathbb{R}^n, 1\leqslant m<n$. Касательное пространство к поверхности уровня. Примеры.
10. Прямое определение длины гладкой кривой. Примеры.
11. Определение меры Лебега на гладком многообразии произвольной размерности.
12. Длина дуги гладкой кривой в пространстве $\mathbb{R}^n$. Длина графика отображения сегмента в пространство $\mathbb{R}^n$.
13. Площадь 2-мерного многообразия в n-мерном пространстве.
14. Площадь графика функции 2-х переменных.
15. Площадь сектора $\alpha<\varphi<\beta, 0<\rho<f\ \varphi$ в полярных координатах.
16. Площадь поверхности вращения гладкой кривой.
17. Общее определение интеграла Лебега по неотрицательной мере. Интеграл 1-го рода по многообразию. Теорема о вычислении интеграла 1-го рода.
18. Криволинейные интегралы 1-го рода. Формулы для их вычисления. Физические задачи, приводящие к криволинейным интегралам 1-го рода.
19. Поверхностные интегралы 1-го рода. Формулы их вычисления. Физические задачи, приводящие к поверхностным интегралам 1-го рода.

Второй вопрос билета

1. Базисы одной ориентации в пространствах размерности 2 и 3.
2. Базисы одной ориентации в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ориентированное евклидово пространство.
3. Согласованные карты многообразия. Ориентирующий атлас. Ориентируемое многообразие. Ориентированное многообразие.
4. Критерий согласованности гладких карт (через якобиан функции перехода).
5. Задание ориентации гладкой кривой в n-мерном пространстве.
6. Ориентация замкнутого контура на плоскости.
7. Согласованность декартовых, цилиндрических и сферических координат.
8. Ориентация графика непрерывно дифференцируемого отображения.
9. Теорема о поле нормалей, определяемом гладкой картой.
10. Теорема о задании ориентации непрерывным полем нормалей.
11. Примеры ее применения: Задание ориентации на окружности. Задание полем нормалей ориентации графика функций 1-го и 2-х переменных.
12. Естественная ориентация поверхности уровня вещественной функции.

13. Теоремы о крае гладкого многообразия. Определение ориентации края, согласованной с ориентацией всего многообразия. Примеры на чертежах.
14. Внешнее произведение линейных функционалов. Определение и свойства.
15. Кососимметрические полилинейные формы. Определение и свойства.
16. Внешнее произведение дифференциалов независимых переменных. Его геометрический смысл (хотя бы для $dx \wedge dy,\ dy \wedge dz,\ dz \wedge dx$ в $\mathbb{R}^3$).
17. Пространство $\wedge^p(\mathbb{R}^n)$. Общий вид $\Phi \in \wedge^p(\mathbb{R}^n)$ при $p = 1, 2, \ldots, n-1, n.$
18. Дифференциальная форма степени $p \geqslant 0$ на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Общий вид дифференциальной формы степени $p \geqslant 0$ от n переменных.
19. Общий вид дифференциальной формы степени 0,1,2,3, …, $n-1, n$ от n переменных. Частные случаи при $n = 1, 2, 3$.
20. Векторное поле. Дифференциальная форма работы векторного поля.
21. Потенциальные векторные поля.
22. Дифференциальная форма потока векторного поля.
23. Внешнее дифференцирование дифференциальной формы.
24. Градиент скалярного поля. Его связь с операцией внешнего дифференцирования.
25. Ротор векторного поля. Его связь с операцией внешнего дифференцирования .
26. Дивергенция векторного поля. Ее связь с операцией внешнего дифференцирования.
27. Операция замены переменных в дифференциальной форме.
28. Определение потока векторного поля через 2-мерную ориентированную поверхность. Сведе́ние вычисления потока поля к вычислению интеграла Лебега.
29. Определение интеграла 2-го рода от дифференциальной формы по ориентированному многообразию.
30. Кусочно-гладкие кривые и поверхности. Определения и примеры.
31. Ориентация на кусочно гладком многообразии. Определение и примеры.
32. Интеграл 2-го рода по ориентированной кусочно гладкой поверхности. Определение и свойства.
33. Физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода.
34. Формула Ньютона – Лейбница для криволинейного интеграла 2-го рода и ее следствия для потенциального поля.
35. Формула Грина. Следствие о площади.
36. Формула Гаусса – Остроградского и классическая формула Стокса.
37. Общая формула Стокса.

Третий вопрос билета

1. Степенной ряд. Радиус и интервал его сходимости. Формулы Даламбера, Коши, формула Коши – Адамара для радиуса сходимости (с доказательством). Привести пример применения формулы Коши – Адамара.
2. Свойства суммы степенного ряда: непрерывность, дифференцируемость, почленное интегрирование (с доказательством). Привести примеры применения этих теорем.
3. Равномерная сходимость степенного ряда. Теорема Абеля (с доказательством). Привести примеры применения этой теоремы.
4. Ряд Тейлора. Критерий сходимости ряда Тейлора к значениям функции (с доказательством). Применение этого критерия к стандартным разложениям в ряд Маклорена. Сходимость биномиального ряда (рассмотреть отдельные случаи).

5. Определение тригонометрического ряда Фурье и обоснование коэффициентов Эйлера – Фурье при равномерной сходимости ряда (с доказательством). Свойства ряда Фурье на $(-\pi;\pi)$ для четной, нечетной функции.
6. Интегральные представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье (с доказательством). Какие интегралы равны 1 вследствие этих формул?
7. Лемма Римана – Лебега (с доказательством), следствие для коэффициентов Эйлера – Фурье. Привести примеры интегралов с параметром, сходящихся к нулю по лемме Римана – Лебега.
8. Принцип локализации и признак Дини сходимости триг. ряда Фурье (с доказательством). Привести пример применения признака Дини.
9. Признак Липшица сходимости триг. ряда Фурье (с доказательством) и его следствие для дифференцируемых функций (с доказательством). Привести пример применения признака Липшица.
10. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании триг. ряда Фурье (с доказательством). Привести пример применения одной из теорем.
11. Минимальное свойство частичных сумм триг. ряда Фурье, неравенство Бесселя (с доказательством). Равенство Парсеваля. Записать равенство Парсеваля для какого-нибудь триг. ряда Фурье.
12. Собственный интеграл (Римана), зависящий от параметра, его непрерывность, дифференцирование по параметру, интегрирование по параметру (все – с доказательством). Привести пример.
13. Несобственный интеграл, зависящий от параметра. Равномерная сходимость по параметру. Признаки равномерной сходимости: Вейерштрасса, Дирихле, Абеля (с доказательством). Привести пример применения признака Абеля.
14. Несобственный интеграл, зависящий от параметра, его непрерывность, дифференцирование по параметру, интегрирование по параметру (все – с доказательством). Привести пример.
15. Бета- и гамма- функции. Теорема об их области определения (с доказательством). Непрерывность этих функций на их области определения (с доказательством).
16. Основные свойства бета- и гамма- функции (с доказательством). Значения этих функций в некоторых точках. Формула Стирлинга.
17. Суммирование рядов методом средних арифметических. Теорема о совпадении сумм, если ряд сходится (с доказательством). Примеры суммирования рядов методом средних арифметических.
18. Суммы Фейера, их интегральное представление. Теоремы о сходимости и равномерной сходимости сумм Фейера к функции (с доказательством).
19. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами (с доказательством). Что можно сказать о замыкании множества многочленов в метрическом пространстве $C\,[a;\,b]$?

Примеры задач на экзамене

Первый семестр

1. Исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}$: $x_n = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

2. Доказать по определению: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3 - 1} = +\infty$

3. Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{3n-2}\right)^n$ 4. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$

5. Найти точки разрыва, определить их род: $f(x) = (\lg x)^{-1}$

6. Вычислить первую и вторую производную функции $f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

Второй семестр

1. Вычислить неопределённый интеграл: $\int \frac{arctg\sqrt{x}\,dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

2. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}$ в точке $M(0, 2, 1)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2-xy-x$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+5}{4n+1}\right)^n$.

5. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+x^4}}, \quad x\in\mathbb{R}$.

Третий семестр

1. Вычислить интеграл по мере Лебега $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda$, если $f=\sum_{n=1}^{\infty} b^{-n}\cdot\chi_{[n;n+a^{-n}]}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

2. Исследовать интеграл на сходимость: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3. Исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимость $\int_0^{+\infty}\frac{(x-1)\cos 3x}{x^2-4x+5}dx$.

4. Найти объем, ограниченный поверхностями: $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

5. Найти $\iint_D (2+x-y)\,dxdy$, где $D:\ x^2+y^2\geq 1,\ x^2+y^2\leq 9,\ y\geq x,\ y\leq\sqrt{3}x$.

Четвертый семестр

1. Найти $\int_\Gamma xdy$, Г – верхняя полуокружность $x^2+y^2=a^2$ от т.$A(-a,0)$ до т. $B(a,0)$.

2. Вычислить $\iint_S z^2 dS$, если $S=\{x^2+y^2+z^2\leq a^2, x=y\}$.

3. Доказать, что $\int_C\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}=0$ по любому замкнутому контуру C, не пересекающему плоскость $x+ y + z = 0$.

4. Найти поток поля $\overline{F}=(x^2z^2-x^2y^2)\overline{i}+(3xy^2z^2-2xyz^2)\overline{j}+(2xy^2z-2xyz^3)\overline{k}$
через внешнюю сторону поверхности $S=(x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$.

5. Разложить на интервале $(-\pi, \pi)$ в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos(x/2)$. Построить график суммы полученного ряда.

6. Вычислить, используя эйлеровы интегралы: $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^3)^2}$.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний могут быть использованы для формирования программы ГИА (программы государственного экзамена), а также экспертом Рособрнадзора при проведении проверки диагностической *работы по оценки уровня форсированности компетенций обучающихся (при контрольно-надзорной проверке). Вопросы данного раздела показывают вклад дисциплины в образовательный результат образовательной программы. Объем заданий в данном разделе зависит как от количества формируемых индикаторов достижения компетенций, так и от объема дисциплины по учебному плану.*

Данный тест может быть предложен студентам 3 или 4 курса бакалавриата после получения оценок за 1, 2, 3, 4 семестр по дисциплине «Математический анализ». Предлагается один вариант теста, выбранный случайным образом. Для успешного выполнения теста все задания должны быть решены верно (проверяются ИОПК 1.2, ИОПК 1.3), кроме того, решение каждого задания должно быть снабжено определением основных математических понятий, встретившихся в его формулировке. Эти определения необходимо взять из представленной ниже основной литературы по дисциплине или из других источников, с указанием источника (проверяются ИОПК 1.1, ИОПК 8.1, ИОПК 8.2).

Примерные варианты теста:

Вариант 1.

1. Даны два множества $C=[0,4]$ и $D=(2,6)$. Какое из приведенных множеств является их пересечением?

1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$

2. Даны функции $\alpha(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $\beta(x)=\dfrac{3}{x^2}$, $\gamma(x)=\dfrac{x}{3}$. Из них бесконечно малой функцией при $x\to 0$ является функция:

1) $\alpha(x)$; 2) $\beta(x)$; 3) нет верного ответа; 4) $\gamma(x)$

3. Рядом Тейлора для функции $f(x)=e^x$ в точке $x_0=0$ является ряд

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}x^k$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}x^k$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k!}x^k$ 4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}x^k$

4. Какое из множеств является компактным:

1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$

5. Какая из функций раскладывается в ряд Фурье по косинусам

1) $f(x)=x,\ x\in(-\pi,\pi)$ 2) $f(x)=e^x,\ x\in(-1,1)$ 3) $f(x)=|x|,\ x\in(-\pi,\pi)$ 4) $x^3, x\in(-1,1)$

Вариант 2.

1. Областью определения функции $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ является промежуток

1) $\mathbb{R}$; 2) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; 3) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; 4) $\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$;

2. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+5x^2+7x}{5x^3-6x^5}$ равен:

1) 2; 2) $-\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{2}{5}$; 4) нет верного ответа.

3. График функции $y=x^4-2$ является выпуклым вверх на промежутке:

1) $(0;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)$; 3) нет верного ответа; 4) $(0,5\ ;+\infty)$.

4. Частная производная функции $f(x,y)=\sin e^{xy}$ по переменной x равна

1) $y\cos e^{xy}$ 2) $ye^{xy}\cos e^{xy}$ 3) $\cos e^{y}$ 4) $\cos e^{yx}\sin e^{y}$

5. Интеграл $\int x\cos x^2 dx$ равен:

1) $-\frac{1}{2}\sin x^2 + C$; 2) $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$; 3) $x\sin x^2 + x^2\cos x^2 + C$; 4)нет верного ответа.

Вариант 3.

1. Какое из указанных множеств не является ограниченным сверху

1) $(-3{,}14)$ 2) $(-\infty,4]$ 3) $\{[0,n) : n\in \mathrm{N}\}$ 4) $\left\{\frac{1}{n} : n\in \mathrm{N}\right\}$

2. Производная функции $f(x)=e^{x^2}$ равна:

1) $x^2e^{x^2-1}$; 2) нет верного ответа; 3) e^{2x}; 4) $2xe^{x^2}$

3. Рядом Тейлора для функции $f(x)=\ln(x+1)$ в точке $x_0=0$ является ряд

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ 2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}x^k$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k$ 4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$

4. Асимптотой функции $y=\frac{x^2-1}{x}$ является прямая:

1) $y=x+1$; 2) $y=-x$; 3) $y=x$; 4) нет верного ответа.

5. Значение какого интеграла равно объему тела V

1) нет верного ответа. 2) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$ 3) $\iiint\limits_V dxdydz$ 4) $\int\limits_0^{2\pi} Vdx$

Вариант 4.

1. Какая из последовательностей является сходящейся

1) $\frac{1}{n}$ 2) $\ln\frac{1}{n}$ 3) $n^{\frac{1}{2}}$ 4) $\sin n$

2. Какая из функций является непрерывной

1) $\frac{1}{x}$ 2) $\operatorname{sign} x$ 3) $\begin{cases} x+1, x>0 \\ x^2, x\le 0\end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x, x>\pi \\ -x, x\le \pi\end{cases}$

3. Первообразной для функции $f(x)=x^3+2\cos 3x$ является функция:

1) нет верного ответа; 2) $F(x)=3x^2-6\sin x$; 3) $F(x)=\frac{x^4}{4}+2\sin 3x$;

4) $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}\sin 3x$.

4. Производной функции $f(x)=-5\cos e^{2x}$ в точке x является:

1) $10e^{2x}\sin e^{2x}$ 2) $5\cos e^{2x}$ 3) $-\sin e^{2x}$ 4) $\cos e$

5. К какому из интегралов можно применить формулу Грина

1) $\int\limits_L ydx-xdy$ 2) $\iint\limits_S y^2dz\wedge dx - x^2dy\wedge dz + z^2dz\wedge dx$ 3) $\int\limits_L zdx+2xdy-ydz$

4) $\iint\limits_D xydxdy$

Вариант 5.

1. Даны два множества $C=[0,4]$ и $D=(2,6)$. Какое из приведенных множеств является их объединением?
1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$

2. Какой из рядов является знакоположительным
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-n}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+x)^3$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-e)^n$

3. Дифференциалом функции $f(x)=e+\ln x$ является функция
1) $\frac{1}{x}$ 2) $\left(e+\frac{1}{x}\right)dx$ 3) $\frac{1}{x}dx$ 4) $e+\frac{1}{1+x^2}$

4. Даны функции $\alpha(x)=\frac{1}{x+1}$, $\beta(x)=\frac{3}{x^2}$, $\gamma(x)=\frac{x}{3}$. Из них бесконечно большой функцией при $x\to 0$ является функция:

1) $\alpha(x)$; 2) $\beta(x)$; 3) нет верного ответа; 4) $\gamma(x)$.

5. Какой из интегралов является определенным
1) $\int\frac{dx}{3x^2-27}$; 2) $\int_e^{3e}\ln 2x dx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5}$; 4) нет верного ответа.

Вариант 6.

1. Даны два множества $C=[1,6]$ и $D=(0,3)$. Какое из приведенных множеств является их объединением?
1) $(0,6]$ 2) $[1,3)$ 3) $[1,3]$ 4) $(0,6)$
2. Какой из рядов является знакочередующимся
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-n}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+x)^3$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-e)^n$
3. Какая из функций является разрывной
1) $e^{\cos x}$ 2) $\operatorname{sign} x$ 3) $\begin{cases} x+1, x>0 \\ \frac{x^2}{3}+1, x\le 0\end{cases}$ 4) $\sin x$
4. Асимптотой функции $y=\frac{x^3-2}{x^2}$ является прямая:
1) $y=x+2$; 2) $y=-x$; 3) $y=x$; 4) нет верного ответа.
5. Частная производная функции $f(x,y)=\sin e^{xy}$ по переменной y равна
1) $y\cos e^{xy}$ 2) $ye^{xy}\cos e^{xy}$ 3) $xe^{xy}\cos e^{xy}$ 4) $\cos e^{yx}\sin e^{y}$

Вариант 7.

1. Область определения функции $y=\ln(3+2x)$ имеет вид:
1) $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$; 3) нет верного ответа; 4) $(0;+\infty)$.

2. Даны функции $\alpha(x)=\frac{1}{x+3}$, $\beta(x)=\frac{3}{x^2}$, $\gamma(x)=\frac{x+3}{5}$. Из них бесконечно большой функцией при $x\to-3$ является функция:

1) $\alpha(x)$; 2) $\beta(x)$; 3) нет верного ответа; 4) $\gamma(x)$.

3. Дифференциалом функции $f(x)=\cos x+3e^{3x}$ является функция

1) $-\sin x+9e^{3x}$ 2) $\left(-\sin x+3e^{3x}\right)dx$ 3) $\sin x+3e^{3x}$ 4) $\left(-\sin x+9e^{3x}\right)dx$

4. Первообразной для функции $f(x)=x^6+2\sin 3x$ является функция:

1) нет верного ответа; 2) $F(x)=7x^6-6\sin x$; 3) $F(x)=\frac{x^7}{7}-\frac{2}{3}\cos 3x$;

4) $F(x)=\frac{x^5}{7}+\frac{2}{3}\cos 3x$.

5. Значение какого интеграла равно площади фигуры S

1) нет верного ответа. 2) $\iint\limits_S dxdy$ 3) $\iint\limits_S (x+y)dxdy$ 4) $\int\limits_0^{2\pi} Sdx$

Вариант 8.

1. Какое из указанных множеств не является ограниченным снизу

1) $(-3{,}14)$ 2) $(-\infty,4]$ 3) $\{[0,n):n\in\mathrm{N}\}$ 4) $\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}\right\}$

2. Предел $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ равен:

1) 3; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) нет верного ответа; 4) $-\frac{2}{3}$.

3. Рядом Тейлора для функции $f(x)=\cos x$ в точке $x_0=0$ является ряд

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)}x^{2k}$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{k}$ 4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$

4. Какой из интегралов является неопределенным

1) $\int\frac{dx}{3x^2-27}$; 2) $\int_e^{3e}\ln 2x dx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5}$; 4) все.

5. К какому из интегралов можно применить формулу Гаусса-Остроградского

1) $\int\limits_L ydx-xdy$ 2) $\iint\limits_S y^2dx\wedge dy-x^2dy\wedge dz+z^2dz\wedge dx$ 3) $\int\limits_L zdx+2xdy-ydz$

4) $\iint\limits_D xydxdy$

Вариант 9.

1. Какая из последовательностей является сходящейся

1) $8\ln\frac{1}{n}$ 2) $n^{\frac{1}{4}}$ 3) $\cos n$ 4) $\frac{1}{n^2}$

2. Производная функции $f(x)=\cos\left(x^3\right)$ равна:

1) $-3x^2\cos\left(x^3\right)$; 2) нет верного ответа; 3) $3x^2\sin\left(x^3\right)$; 4) $-3x^2\sin\left(x^3\right)$.

3. График функции $y = x^2 - 5$ является выпуклым вверх на промежутке:

1) $(0;+\infty)$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) нет верного ответа; 4) $(5;+\infty)$.

4. Какое из множеств является открытым на евклидовой прямой:
1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$

5. Какая из функций раскладывается в ряд Фурье по синусам
1) $f(x) = x^2,\ x \in (-\pi, \pi)$ 2) $f(x) = e^x,\ x \in (-1,1)$ 3) $f(x) = |x|,\ x \in (-\pi, \pi)$

4) $x^3,\ x \in (-2,2)$

Вариант 10.
1. Даны два множества $C = [0,4]$ и $D = (2,6)$. Какое из приведенных множеств является разностью $C \setminus D$?
1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$
2. Какая из последовательностей является сходящейся
1) $n^{\frac{1}{2}}$ 2) $\ln\frac{1}{n}$ 3) $e^{\frac{1}{n}}$ 4) $\sin n$
3. Какой из рядов является знакопеременным
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+x)^3$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-e)^n$
4. Рядом Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = 0$ является ряд
1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$ 3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} x^{2k-1}$ 4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$

5. Какая из точек является точкой максимума для функции $y = 8x - \frac{1}{4}x^4$:

1) 2; 2) 12; 3) -2; 4) 0

Ключи к тесту:

Вариант 1	1	2	3	4	5
Ответ	2	4	4	3	3

Вариант 2	1	2	3	4	5
Ответ	4	2	3	2	2

Вариант 3	1	2	3	4	5
Ответ	3	4	1	3	3

Вариант 4	1	2	3	4	5
Ответ	1	1	4	1	1

Вариант 5	1	2	3	4	5
Ответ	1	2	3	2	2

Вариант 6	1	2	3	4	5
Ответ	1	4	2	3	3

Вариант 7	1	2	3	4	5
Ответ	1	1	4	3	2

Вариант 8	1	2	3	4	5
Ответ	2	2	1	1	2

Вариант 9	1	2	3	4	5
Ответ	4	4	3	4	4

Вариант 10	1	2	3	4	5
Ответ	3	3	1	2	1

Перечень учебной литературы

– Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – СПб.: Лань, 2020
– Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. – М.: Юрайт, 2020
– Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу Т.1, 2, 3. – М.: Физматлит, 2016
– Зорич В. А. Математический анализ Ч. 1, 2. – М.: МЦНМО, 2019
– Ильин В. А., Садовничий, Сендов Бл. Х. Математический анализ Ч. 1, 2: учебник для бакалавров. – М.: Юрайт, 2017.
– Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний , 2017
– Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 1,2,3. – СПб.: Лань, 2016.

Информация о разработчиках

Галанова Наталия Юрьевна, к.ф.-м.н, доцент, доцент каф. Общей математики ММФ ТГУ;
Емельянова Татьяна Вениаминовна, к.ф.-м.н, доцент каф. Математического анализа и теории функций ММФ ТГУ;
Лазарева Елена Геннадьевна, к.ф.-м.н, доцент, доцент каф. Общей математики ММФ ТГУ.