Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Факультет инновационных технологий

УТВЕРЖДЕНО:
Декан
С. В. Шидловский

Оценочные материалы по дисциплине

# Дискретная математика

по направлению подготовки

**09.03.02 Информационные системы и технологии**

Направленность (профиль) подготовки:
**Программное и аппаратное обеспечение беспилотных авиационных систем**

Форма обучения
**Очная**

Квалификация
**Инженер - программист**
**Инженер - разработчик**

Год приема
**2024**

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
С.В. Шидловский

Председатель УМК
О.В. Вусович

Томск – 2024

## 1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

ОПК-8 Способен применять математические модели, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.

РООПК-1.2 Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования

РООПК-8.1 Знает математику, методологию и основные методы математического моделирования, классификацию и условия применения моделей, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем

## 2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– домашняя работа.

Текущий контроль проводится в течение семестра с целью определения уровня усвоения обучающимися знаний, формирования умений и навыков, своевременного выявления преподавателем недостатков в подготовке обучающихся и принятия необходимых мер по ее корректировке, а также для совершенствования методики обучения, организации учебной работы, и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Каждая домашняя работа выполняется в соответствии с методическими рекомендациями, представленными в ЭУК в системе «Среда электронного обучения iDO» по ссылке https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=1783

**Критерии оценивания**

| Оценка | Характеристика ответа |
|---|---|
| Зачтено | Все задачи решены верно. Студент владеет теоретическим материалом, формулирует собственные, самостоятельные, обоснованные, аргументированные суждения, допуская незначительные ошибки на дополнительные вопросы |
| Не зачтено | Работа выполнена не полностью. Студент не владеет теоретическим материалом, допуская грубые ошибки, испытывает затруднения в формулировке собственных суждений, не способен ответить на дополнительные вопросы |

## 3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Элемент текущего контроля - контрольная работа.

**Тема 1. Множества**

**1.1.** Доказать, что

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

для любых множеств $A$; $B$, для этого доказать:

$$(x \in A)\ IFF\ (x \in (A - B) \cup (A \cap B)).$$

**1.2.** Доказать **теорему** (Дистрибутивность объединения над пересечением).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Для любых множеств $A$; $B$; $C$, построив цепочку утверждений «если и только если».

**1.3.** Доказать дистрибутивность объединения над пересечением для n множеств, используя индукцию:

$$A \cup \left( \cap_{1 \le i \le n} B_i \right) = \cap_{1 \le i \le n} \left( A \cup B_i \right)$$

**1.4.** Пусть $A$ и $B$ – произвольные множества.

(a) Доказать, что

$$pow(A \cap B) = pow(A) \cap pow(B)$$

(b) Доказать, что

$$pow(A) \cup pow(B) \subseteq pow(A \cup B)$$

где равенство верно если и только если $A$ или $B$ есть подмножество второго множества.

**1.5.** Доказать, что для любых множеств $A$, $B$, $C$, и $D$, если декартовы произведения $A \times B$ и $C \times D$ не пересекаются, то или $A$ и $C$, или $B$ и $D$ не пересекаются.

**1.6.**

(a) Приведите простой пример, когда следующий результат неверен, и кратко объясните, почему:

**Не теорема.** Для множеств $A$, $B$, $C$, и $D$, пусть

$$L = (A \cup B) \times (C \cup D)$$
$$R = (A \times C) \cup (B \times D)$$

Тогда $L = R$.

(b) Найдите ошибку в следующем не доказательстве.

**Не доказательство.** Поскольку $L$ и $R$ есть множества пар, достаточно показать, что

$$(x;\ y) \in L\ IFF\ (x;\ y) \in R\ for\ all\ x;\ y.$$

Построим цепочку «если и только если»:

$(x;\ y) \in R$

$\Leftrightarrow (x;\ y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$

$\Leftrightarrow (x;\ y) \in (A \times C)$ или $(x;\ y) \in (B \times D)$

$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ и $y \in C$) или ($x \in B$ и $y \in D$)

$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ или $x \in B$), и ($y \in C$ или $y \in D$)

$\Leftrightarrow x \in A \cup B$ и $y \in C \cup D$

$\Leftrightarrow (x;\ y) \in L$.

(c) Исправьте доказательство, чтобы показать, что $R \subseteq L$.

**1.7.** Какими свойствами обладает отношение $xRy$: $x^2 + x = y^2 + y$, определенное на множестве действительных чисел (рефлексивность, симметричность, транзитивность)?

**1.8.** Какие функции являются инъекциями, сюръекциями, биекциями:

$$f_1(x) = e^x;$$

$$f_2(x) = x^3 - x;$$

$$f_3(x) = 2x + 1;$$
$$f_4(x) = x^2.$$

**1.9.** Какие отношения являются отношениями эквивалентности или порядка (строгого или нестрогого, линейного или частичного):

$$xRy: x\ mod\ 3 = y\ mod\ 3;\ x, y \in N;$$
$$xRy: x\ mod\ 3 < y\ mod\ 3;\ x, y \in N;$$
$$xRy: x\ mod\ y = 0;\ x, y \in N.$$

## Тема 2. Элементы комбинаторики

**2.1.** У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

**2.2.** Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

**2.3.** В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

**2.4.** В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

**2.5.** Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

**2.6.** Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

**2.7.** В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

**2.8.** Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

**2.9.** Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове Гора и Институт?

**2.10.** Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

**2.11.** В комнате имеется 6 лампочек, каждая со своим выключателем. Сколькими способами можно освещать комнату?

**2.12.** Из группы, в которой учатся 20 человек, нужно выбрать двоих студентов для волонтерской деятельности. Сколькими способами это можно сделать?

**2.13.** Из пяти военнослужащих рядового состава и трех военнослужащих сержантов необходимо сформировать две группы по 4 человека в каждой группе, при условии, что в каждой группе должен быть хотя бы один сержант. Сколькими способами можно составить эти группы?

**2.14.** Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры в записи могут повторяться?

**2.15.** Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

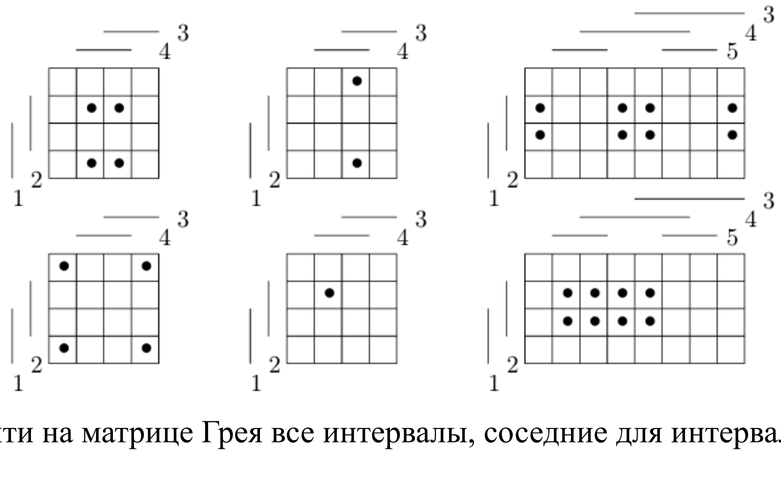
## Тема 3. Булевы функции

**3.1.** Перечислить булевы векторы, образующие следующие интервалы: $I_1(0001,\ 1001)$; $I_2(01010,\ 11011)$; $I_2(0000,\ 1100)$; $I_4(000,\ 111)$. Задать эти интервалы на матрице Грея и вычислить их ранги.

**3.2**. Являются ли следующие множества булевых векторов интервалами? Если да, то задать их троичными векторами.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 00000 | 01100 | 0101 | 0001 | 10011 |
| 00001 | 01101 | 1011 | 0101 | |
| 01000 | 00100 | 1101 | | |
| | 00101 | 0001 | | |
| | 10101 | | | |
| | 10100 | | | |
| | 11100 | | | |
| | 11101 | | | |

**3.3.** Образуют ли интервал векторы, выделенные на матрице Грея? Если да, то представить интервал троичным вектором и найти его границы.



**3.4.** Найти на матрице Грея все интервалы, соседние для интервала $I\ = 10 - 0 -$.

**3.5**. Задать с помощью таблиц истинности, характеристических множеств, векторов, матриц Грея и интервалов следующие булевы функции:

$f_1$: $B^3 \to B$, функция равна единице на тех и только тех наборах, вес которых больше единицы;

$f_2$: $B^4 \to B$, функция равна единице на тех и только тех наборах, которые представляют числа большие или равные 7;

$f_3$: $B^3 \to B$, функция равна нулю на всех наборах с нечетным весом, и только на них.

**3.6.** Привести примеры таблиц истинности булевых функций:

$f_1$: $B^3 \to B$, функция принимает различные значения на противоположных наборах;

$f_1$: $B^3 \to B$: $f(\alpha) \le f(\beta)$, если $\alpha \preccurlyeq \beta$.

**3.7.** Шоссе пересекает железная дорога, на перекрестке имеются шлагбаумы. По обеим сторонам шоссе у полотна дороги расположены датчики, реагирующие на проходящий поезд. Расстояние между датчиками меньше длины любого поезда. Шлагбаум должен быть опущен, когда расстояние от поезда до шоссе меньше, чем расстояние от шоссе до любого датчика, и поднят в противном случае. Построить таблицу истинности булевой функции, описывающей управление шлагбаумами.

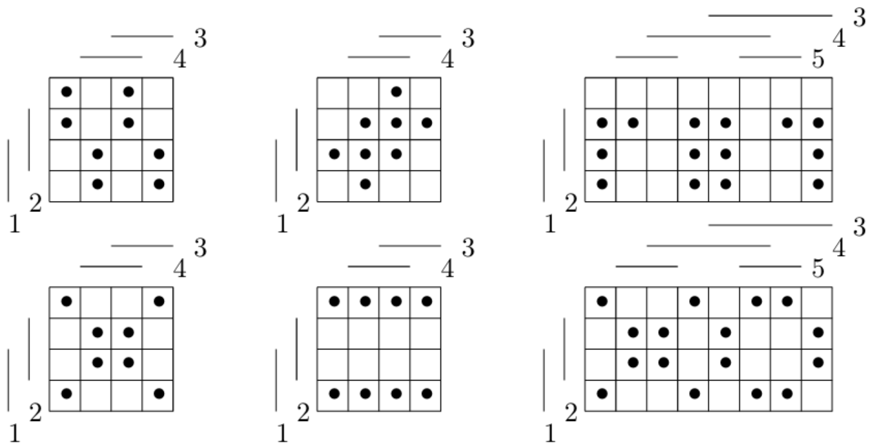
**3.8.** Соревнования обслуживают три судьи, один из них главный. Вес считается поднятым, если "за" проголосовало большинство судей, в том числе и главный. Построить таблицу истинности булевой функции, описывающей такое голосование.

**3.9.** Вдоль длинного коридора размещены лампы. Включение и выключение света управляется тремя выключателями, два из которых расположены в концах коридора, а третий – посередине. При нажатии любого выключателя все лампы включаются, если были выключены, и выключаются, если были включены. Построить таблицу истинности булевой функции, описывающей управление освещением коридора.

**3.10.** Найти и удалить фиктивные переменные булевых функций.

| $x$ | $y$ | $z$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

**3.11.** Найти и удалить фиктивные переменные булевых функций.




**3.12.** Представить все элементарные булевы функции матрицами Грея и разбить их на пары инверсных функций.

**3.13.** Построить таблицы истинности:

$$F_1 = xy \to (y \vee z)$$
$$F_2 = x \to y \vee (x \to z)$$
$$F_3 = x(x \downarrow y) \vee (y \downarrow z)$$

**Тема 4. Графы**

**4.1.** Спортивное соревнование проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. Докажите, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, которые провели одинаковое количество встреч.

**4.2.** В шахматном турнире по круговой системе участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя – пять, Леша и Дима – по три, Семен и Илья – по две, Женя – одну. С кем сыграл Леша?

**4.3**. Чемпионат лагеря по футболу проводился по круговой системе. За победу в матче давалось два очка, за ничью – одно, за поражение – ноль. Если две команды набирали одинаковое количество очков, то место определялось по разности забитых и пропущенных мячей. Чемпион набрал семь очков, второй призер – пять, третий – три. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

**4.4.** В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

**4.5.** В теннисном турнире каждый игрок команды А встречается с каждым игроком команды Б. Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. Игроки команды А выиграли в 4 раза больше встреч, чем игроки команды Б. Сколько человек в каждой из команд?

**4.6.** Известно, что в компании каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить за круглым столом так, что каждый будет сидеть со своими знакомыми.

**4.7.** В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями с не более чем тремя другими, и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

**4.8.** У каждого депутата не более трех противников (если А – противник Б, то Б – противник А). Докажите, что депутатов можно разбить на две палаты так, что каждый депутат будет иметь не более одного противника в своей палате.

**4.9.** Десять кандидатов готовятся к двум космическим экспедициям на Марс. Поскольку экспедиции будут продолжаться несколько лет, а их участники окажутся в замкнутом пространстве небольшого объема, то важное значение приобретает психологическая совместимость членов экипажа. Путем тестирования были установлены пары кандидатов, присутствие которых в одной экспедиции было бы нежелательно. Результаты тестирования отражены в таблице (если на пересечении строки и столбца стоит +, то кандидаты с соответствующими номерами несовместимы). Разделите кандидатов на две группы для участия в экспедиции.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | + | + | + | | | | | | |
| 2 | + | | | | + | | | | | |
| 3 | + | | | | | | + | | | |
| 4 | + | | | | | + | | | | |
| 5 | | + | | | | | | + | | |
| 6 | | | | + | | | | | | + |
| 7 | | | + | | | | | + | | + |
| 8 | | | | | + | | + | | + | |
| 9 | | | | | | | | + | | + |
| 10 | | | | | | + | + | | + | |

**4.10.** В один день проводится семь лекций, некоторые из которых не могут читаться одновременно (в таблице такие пары лекций отмечены крестиком). Каждая лекция занимает один час. Определите минимальное время, за которое могут быть прочитаны все лекции.

| | математика | физика | химия | информатика | право | экономика | английский |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| математика | | + | | + | | | + |
| физика | + | | + | | + | + | |
| химия | | + | | | + | + | + |
| информатика | + | | | | + | + | |
| право | | + | + | + | | + | |
| экономика | | + | + | + | + | | |
| английский | + | | + | | | | |

**4.11.** Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний – одна, а из каждого из остальных городов – по 12 линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).

**4.12.** В парке «Лотос» невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более одного раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

Администрация парка «Лотос» решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик будет освещаться четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик – шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков?

**4.13.** Государство Филиппины расположено на островах. Между некоторыми из островов ежедневно курсируют теплоходы (один рейс в одном направлении, другой – в противоположном). С любого острова можно добраться на любой другой, возможно, с пересадками. Полиция Филиппин пригласила Крутого Уокера для помощи в поимке опасного преступника. Преступник суеверен и не плывет на теплоходе 13 числа каждого месяца и каждый понедельник. Уокер не суеверен. Кроме того, он с помощью агентуры всегда знает, на каком острове находится преступник. Докажите, что если Уокер и преступник будут пользоваться только теплоходами, то они в конце концов окажутся на одном острове.

**4.14.** Есть две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть двойник в Зазеркалье, и наоборот. Если в Обычной стране некоторые два города соединены авиалинией, то в Зазеркалье они не соединены, а если в Обычной стране некоторые два города не соединены авиалинией, то в Зазеркалье они соединены. В Обычной стране Алиса не может добраться из города А в город В, сделав менее двух пересадок. Докажите, что Алиса сможет в Зазеркалье перелететь из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

**4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)**

**Теоретические вопросы:**

1. Определение множества. Парадокс Рассела и аксиоматическая теория множеств
2. Подмножества и операции над множествами, их свойства
3. Множество всех подмножеств и его свойства
4. Последовательности и их отличие от множеств
5. Бинарные отношения и их свойства
6. Отношения эквивалентности и порядка
7. Мощность конечных множеств
8. Мощность бесконечных множеств
9. Правила сложения и умножения
10. Перестановки
11. Размещения
12. Сочетания
13. Биномиальные коэффициенты
14. Треугольник Паскаля
15. Булевы константы и векторы
16. Пара булевых векторов, отношение предшествования
17. Матрица в коде Грея
18. Интервал, его распознавание
19. Интервал на матрице Грея
20. Соседние интервалы
21. Булева функция и способы ее задания
22. Фиктивные переменные, их выявление и удаление
23. Формула как способ задания функции

24. Равносильность формул, способы доказательства
25. Свойства 0 и 1
26. Двойственная функция, ее построение
27. Двойственная формула и принцип двойственности
28. Разложение Шеннона
29. Разложение по к переменным
30. Совершенная ДНФ и совершенная КНФ
31. Элементарная конъюнкция и ДНФ
32. Преобразование ДНФ в совершенную ДНФ
33. ДНФ и достаточное множество интервалов
34. Построение ДНФ по формуле
35. Импликанты функции и сокращенная ДНФ
36. Минимальная и кратчайшая ДНФ
37. Безызбыточная ДНФ
38. Кратчайшие ДНФ элементарных функций
39. Определение графов и родственных объектов
40. Смежность вершин и ребер
41. Подграфы
42. Типы графов
43. Изоморфизм графов
44. Операции над графами
45. Способы задания графов

**5. Информация о разработчиках**

Буркатовская Юлия Борисовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры системного анализа и математического моделирования, Институт прикладной математики и компьютерных наук.