Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Симметрия дифференциальных уравнений

по направлению подготовки
03.04.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная и прикладная физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
О.Н. Чайковская

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ПК 1– Способен самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего российского и зарубежного опыта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИПК 1.1 –Знает основные стратегии исследований в выбранной области физики, критерии эффективности, ограничения применимости.

ИПК 1.2 – Умеет выделять и систематизировать основные цели исследований в выбранной области физики, извлекать информацию из различных источников, включая периодическую печать и электронные коммуникации, представлять её в понятном виде и эффективно использовать.

ИПК 1.3 – Владеет навыками аналитической переработки информации, проведения исследований с помощью современной аппаратуры и информационных технологий, обобщения и представления результатов, полученных в процессе решения задач исследования.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля.

I. По дисциплине «Симметрия дифференциальных уравнений» предусмотрены тесты по разделам: Темы 1-2 (ИПК 1.1, ИПК 1.2). Тесты размещены в системе LMS Moodle ТГУ (Learning Management System Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) по ссылке: https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=21972

Тесты по курсу составлены на основе банка вопросов в курсе Moodle.

Пример теста по теме 1 курса.

Вопрос: Проверить верность группового свойства интегральной кривой векторного поля. Выбрать правильный ответ из следующих вариантов:1) $x(t,x(s,x_0))=x(t+s,x_0)$, 2) $x(t,x(s,x_0))=x(t\cdot s,x_0)$, 3) $x(t,x(s,x_0))=x(t-s,x_0)$.

Ключи: 1).

Критерии оценивания: Прохождение теста при правильном ответе (100%) оценивается в 5 баллов. Максимальная оценка 100%; выбор ответа 1) оценивается в 100%; выбор ответа 2), или 3) оценивается в 0%.

II. По Темам 1-11 в курсе предусмотрены Задания (ИПК 1.1, ИПК 1.2., ИПК 1.3).

Пример Задания по Теме 1.

Задание по теме 1

Дать ответы (в виде файла или текста) на следующие контрольные вопросы по теме.

Контрольные вопросы:

1. Записать условия интегрирования векторного поля на гладком многообразии. Сформулировать определение инвариантные множества.
2. Доказать теорему: многообразие инвариантно относительно группы Ли, если генератор группы принадлежит касательному пространству многообразия.
3. Определить инварианты группы. Сформулировать инфинитезимальный критерий инвариантности.
4. Сформулировать определение группы симметрии алгебраической системы уравнений на многообразии. Объяснить смысл условия максимального ранга.
5. Построить преобразования пространства, порождаемые векторным полем $X=x^i\partial/\partial x^i$. Найти инвариантные множества этого векторного поля и его траектории.

Студенты выполняют задание в форме эссе.

Критерии оценивания: Представленный файл эссе оценивается по форме элемента Задание системы Moodle: «простое непосредственное оценивание» по шкале в форме Pass/Fail (зачтено/не зачтено).

III. Контрольная работа по курсу проводится в виде решения 2х задач из банка задач (ИПК 1.1, ИПК 1.2). Примеры задач из контрольных работ.

Задача 1. Показать, что соотношения $x' = ax,\ y' = \dfrac{y}{a}$ задают группу преобразований. Найти векторное поле, порождающее эту группу.

Ключ: Групповое свойство с параметром a проверяется непосредственно, группа мультипликативна, тождественному преобразованию соответствует $a=1$. Для нахождения векторного поля запишем преобразование в форме аддитивной группы, положив параметр $a=e^{\alpha}$. Тогда тождественному преобразованию соответствует $\alpha=0$. Векторное поле имеет вид $X = x\partial/\partial x - y\partial/\partial y$.

Задача 2. Записать инфинитезимальное условие инвариантности решений алгебраической системы относительно однопараметрической группы преобразований многообразия.

Ключ: Алгебраическая система $F_{\nu}(x)=0$ на конечномерном гладком многообразии $M,\ x\in M$, задает подмногообразие $Ker\,F \subset M$. Однопараметрическая группа Ли на M характеризуется векторным полем $X \quad M$. Инфинитезимальное условие инвариантности записывается в виде $X(F)(x)_{F(x)=0} = 0$.

Критерии оценивания: результаты контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если студент предъявляет правильные письменные решения двух задач, то есть для каждой задачи способен обосновать метод решения, понимает используемые термины и формулы и получил правильный ответ. При невыполнении указанных критериев оценки «зачтено» выставляется оценка «не зачтено».

IV. Для углубленного изучения курса по основным разделам курса студентам предлагаются темы для рефератов (ИПК 1.1, ИПК 1.2., ИПК 1.3).

Темы для рефератов и учебно-методическая литература для самостоятельной работы по разделам дисциплины «Симметрия дифференциальных уравнений»:

Задача реферата – объяснить базовые представления о группах Ли, их связи с дифференциальными уравнениями на основе геометрической теории дифференциальных уравнений, освоить методы вычисления симметрий и их применение к основным уравнениям теоретической и математической физики.

Тема 1. Симметрии нелинейных эволюционных уравнений.

Получить определяющие уравнения для симметрий эволюционных уравнений на примерах солитонных уравнений. Рассмотреть применение группового и симметрийного анализа к нелинейным уравнениям.

Литература:

– Дубровин Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения.Т.1-3 / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. –М.: Изд-во URSS, 2013. 920 с.

– Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

– Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983.

– Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.

– Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. – М.: Наука, 1990.

–Захаров В.Е.Теория солитонов: Метод обратной задачи/ В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980.

–Тахтаджян Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов/ Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. –М.: Наука, 1986.

– Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 323 с.
– Абловиц М. Солитоны и метод обратной задачи/ М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
–Додд Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения/ Р. Додд ,Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Наука, 1988. 694 с.
– Солитоны/ Ред. Буллаф Р., Кодри Ф./пер.с англ. Дубровина Б.А., Кричевера И.М., Манакова С.В. Под. Ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. 408 с.

Тема 2. Симметрии дифференциальных уравнений в формализме внешних форм.
Освоить методы группового анализа в формализме геометрии многообразия струй.
Литература:
– Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.
– Виноградов А.М. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений/ А.М. Виноградов, И.С. Красильщик, В.В. Лычагин. – М.: Наука, 1983.
– Трофимов В.В. Введение в геометрию многообразий с симметриями. – М.: МГУ, 1989.
– Дубровин Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения.Т.1-3 / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. –М.: Изд-во URSS, 2013. 920 с.

Тема3. Симметрии уравнений квантовой механики.
Применение методов группового и симметрийного анализа к основным уравнениям квантовой механики.
Литература:
– Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
– Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983.
– Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.
– Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. – М.: Наука, 1990.
– Фущич В.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики/ В.И. Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. – Киев: Наукова Думка, 1989.
– Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики/В.И. Фущич, А.Г. Никитин. – М.:Наука, 1990.

Тема 4. Симметрии лагранжевых и гамильтоновых систем.
Рассмотрение примеров применения группового и симметрийного анализа к лагранжевым и гамильтоновым системам.
Литература:
– Дубровин Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения.Т.1-3 / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. –М.: Изд-во URSS, 2013. 920 с.
– Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
– Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983.
– Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.
–Захаров В.Е.Теория солитонов: Метод обратной задачи/ В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980.
–Тахтаджян Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов/ Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. –М.: Наука, 1986.
–Gaeta G. Nonlinear symmetries and nonlinear equations. – Dordrecht, Boston, Kluwer: Acad. Publ., London, 1994.
– Kuperschmidt B. A. Geometry of jet bundles and the structure of Lagrangian and Hamiltonian formalism// Lect.Notes Math. 1980. V. 775. Berlin: Springer.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

В курсе «Симметрия дифференциальных уравнений» используется балльно-рейтинговая система оценки знаний. Максимальная сумма баллов по дисциплине составляет 100 балов и формируется следующим образом: 60 баллов по результатам текущей аттестации и 40 баллов по результатам промежуточной аттестации (экзамен). Итоговая оценка по дисциплине складывается из суммы баллов, полученной по итогам текущего контроля и промежуточной аттестации (устного экзамена).

Текущая аттестация включает:

- активность студента на практических занятиях (0-15 баллов); весь семестр разбит на 3 этапа по четыре недели, баллы выставляются в конце каждого этап (0-5 баллов).
- результаты выполнения контрольных работ (0-15 баллов),
- реферат (0-20 баллов), при невыполнении срока сдачи реферата за каждую просроченную неделю снимается 5 баллов;
- результаты коллоквиума (0-10 баллов).

Промежуточная аттестация проводится в форме устного экзамена который предусматривает дифференцированное оценивание ответа (0-40 баллов).

Экзамен в 3 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Билет содержит два теоретических вопроса, проверяющие компетенции ИПК 1.1, ИПК 1.2. После ответа на билет студент отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов, открытого банка задач, тестов (п. 2), направленные на проверку достижения ИПК 1.2 и ИПК 1.3.

Примерный перечень теоретических вопросов.

Вопрос 1. Найдите соотношение между касательным пространством гладкого многообразия и генератором группы Ли инвариантных преобразований многообразия.

Вопрос 2. Опишите конечномерные инвариантные подпространства допустимых преобразований подмногообразия в многообразии струй.

Примеры задач.

Задача 1. Построить преобразования пространства R^2, порождаемые векторным полем $X = x^2\partial/\partial x + xy\partial/\partial y$.

Задача 2.

Построить определяющие уравнения для алгебры симметрии уравнения теплопроводности с символом $u_{(1)} - u_2$.

Отметка в 40 баллов ставится студенту при правильном ответе не менее чем на 80% вопросов билета и дополнительных вопросов.

Открытый перечень вопросов, выносимых на зачет.

1. Интегрирование векторного поля на гладком многообразии. Инвариантные множества.
2. Теорема: многообразие инвариантно относительно группы Ли, если генератор группы принадлежит касательному пространству многообразия.
3. Инварианты группы. Инфинитезимальный критерий инвариантности.
4. Группа симметрии алгебраической системы уравнений на многообразии. Условие максимального ранга.
5. Соотношение между инвариантами группы на исходном многообразии и инвариантами на множестве решений инвариантного уравнения.
6. Определяющее уравнение группы инвариантности с множителями Лагранжа.
7. Отыскание инвариантов группы.
8. Задание инвариантного многообразия инвариантами группы. Гомоморфизм алгебры Ли на множестве решений инвариантного уравнения.
9. Дефект подмногообразия относительно группы, действующей на многообразии.

10. Многообразие струй. Символы операторов дифференциальных уравнений. Расслоение струй.
11. Допустимые преобразования в многообразии струй. Представление Пфаффа.
12. Однопараметрическая группа Ли допустимых преобразований. Структура генератора группы допустимого преобразования.
13. Свойства допустимых векторных полей, коммутативность операторов X_σ и D_i.
14. Конечномерные подмногообразия многообразия струй инвариантные относительно допустимых преобразований.
15. Алгебры допустимых векторных полей.
16. Идеал в алгебре допустимых векторных полей. Фактор алгебры по идеалу.
17. Алгебра Ли функций на многообразии струй. Идеал, фактор по идеалу.
18. Алгебра $\Sigma(F)$ символа дифференциального оператора F. Идеал в алгебре $\Sigma(F)$.
19. Функция F эволюционного типа. Разложение алгебры $\Sigma(F)$ в прямую сумму идеала и алгебры $\Omega(F)$.
20. Определяющие уравнения алгебры $\Omega(F)$.
21. Определяющие уравнения для симметрий уравнения теплопроводности.
22. Группа Ли симметрии уравнения теплопроводности.
23. Высшие симметрии Понятие о группе Ли-Бэклунда.
24. Законы сохранения для дифференциального уравнения. Симметрии и законы сохранения.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест (ИПК-1.1.).

Пусть $(E,\pi,V), E = M\times V,\ \pi : E\to M$, V - векторное пространство с полной линейной группой GL.

Вопрос: Что является базой расслоения, а что является слоем. Варианты ответа: а) M -база, V -слой, б) M -слой , V -база, в) GL -база, V -слой.

Ключи: а).

Задачи (ИПК-1.2, ИПК 1.3).

Задача 1. Объясните понятие инфинитезимальной инвариантности множества решений алгебраической системы.

Ответ. Зададим на многообразии M однопараметрическую группу Ли преобразований, порождаемую векторным полем X. Тогда инфинитезимальное условие инвариантности множества $Ker\,F$ решений алгебраической системы может быть записано в виде $XF(x) = Q(x)F(x),\ \forall x\in M$, где $Q(x)$ - множитель Лагранжа.

Задача 2. В чем особенность записи определяющего уравнения для симметрий эволюционного уравнения по сравнению с уравнением общего вида?

Ответ. В случае эволюционного уравнения в определяющем уравнении не содержатся множители Лагранжа, так как в процессе вывода определяющего уравнения они выражаются в явном виде.

Теоретические вопросы (ИПК 1.1, ИПК 1.3):

1. Приведите пример записи дифференциального уравнения на многообразии струй.
2. Покажите, что операторы дифференцирования функций на многообразии струй коммутируют.
3. Запишите условие допустимого преобразования в многообразии струй.
4. Покажите, что допустимые векторные поля образуют алгебру Ли.
5. Покажите, что функции, определяющие допустимые векторные поля образуют алгебру Ли.

6. Объясните, как определяются симметрии символа дифференциального оператора в терминах многообразия струй.
7. Запишите вид определяющего уравнения для симметрий дифференциального уравнения.
8. Как записываются дифференциальные следствия дифференциального уравнения в многообразии струй. Объясните смысл введения дифференциальных следствий в нахождении симметрий.
9. Объясните, как выводятся определяющие уравнения для симметрий эволюционного уравнения.
10. Объясните, какие симметрии называют лиевскими. В чем их отличие от высших симметрий.
11. Как определяются законы сохранения для дифференциального уравнения, заданного символом на многообразии струй.
12. Объясните на примере как связаны симметрии с законами сохранения.

Информация о разработчиках

Шаповалов Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики ФФ НИ ТГУ.