

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Рабочая программа дисциплины

Математический анализ

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математические методы в цифровой экономике

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Задачи освоения дисциплины

– Сформировать систему математических знаний, позволяющих понимать связанные теоретические и прикладные дисциплины.

– Научиться применять аппарат математического анализа для построения математических моделей при решении практических задач в различных профессиональных областях.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)». Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы, входит в модуль «Математика».

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Первый семестр, зачет.

Первый семестр, экзамен.

Второй семестр, зачет.

Второй семестр, экзамен.

Третий семестр, зачет.

Третий семестр, экзамен.

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

6. Язык реализации

Русский.

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 20 з.е., 720 часов, из которых:

-лекции: 188 ч.

-практические занятия: 188 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Теория вещественных чисел.

Вводится обобщающее понятие вещественного числа.

Определяются правила сравнения, суммирования и умножения вещественных чисел как обобщение соответствующих правил для рациональных чисел.

Вводится понятие числового множества и его мощности.

Вводится понятие точных граней числового множества.

Тема 2. Предел. Непрерывность.

Вводится понятие функции.

Дается определение и свойства предела последовательности как частного случая функции.

В обобщение предела последовательности вводится понятие предела функции. На его основе рассматривается понятие непрерывности функции.

Излагается теория бесконечно малых и бесконечно больших величин.

Выводятся замечательные пределы для последовательностей и функций.

Изучаются свойства элементарных функций.

Тема 3. Производная и ее применение.

Дается определение и геометрический смысл производной.

Доказывается таблица производных.

Рассматриваются теоремы о функциях, имеющих производную.

Вводится понятие производных высших порядков и их свойства.

Дается определение дифференциала и дифференцируемости функции.

Вводится понятие дифференциалов высших порядков.

Вводится понятие дифференциалов сложных функций.

Выводится формула Тейлора.

Доказывается правило Лопиталья раскрытия неопределенностей.

Рассматривается исследование функции на монотонность и экстремум.

Дается определение выпуклости и точек перегиба графика функции.

Вводится понятие асимптоты графика функции.

Приводится схема исследования функции и построения эскиза графика.

Тема 4. Неопределенный интеграл

Дается понятие первообразной и неопределенного интеграла.

Рассматриваются таблица интегралов и основные методы интегрирования.

Приводятся методы интегрирования рациональных дробей, иррациональных и тригонометрических функций.

Тема 5. Определенный интеграл.

Вводится понятие интегральной суммы и определенного интеграла.

Рассматриваются суммы Дарбу и признак существования определенного интеграла.

Доказываются свойства интегрируемых функций и определенного интеграла.

Выводится формула Ньютона-Лейбница. Дается понятие определенного интеграла как функции верхнего предела интегрирования, доказываются теоремы о среднем.

Приводятся геометрические приложения определенного интеграла: вычисление длин дуг плоских кривых, площадей плоских фигур, объемов, площадей поверхностей вращения.

Тема 6. Несобственные интегралы.

Дается определение и доказываются свойства несобственного интеграла 1 рода.

Рассматриваются признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода. Лемма Бореля.

Дается определение особых точек функции и несобственного интеграла 2 рода.

Вводится понятие главных значений несобственных интегралов.

Исследуются интегралы Фруллани.

Тема 7. Функции многих переменных.

Основные определения. Предел и непрерывность функции многих переменных.

Двойные и повторные пределы.

Производные и дифференциал функции многих переменных.

Неявные функции одной и многих переменных: существование и дифференцируемость

Система неявных функций.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Формула Тейлора.

Экстремум функции многих переменных.

Метод неопределенных множителей Лагранжа решения задачи на условный экстремум функции многих переменных.

Тема 8. Числовые ряды.

Основные определения.

Свойства рядов.

Признаки сходимости рядов.

Сочетательное свойство сходящихся рядов.

Переместительное свойство рядов и теорема Римана.

Умножение рядов.

Тема 9. Криволинейные интегралы.

Определение и вычисление криволинейных интегралов 1 и 2 рода.

Критерий независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути.

Интегралы по простым контурам.

Тема 10. Функциональные и степенные ряды.

Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

Признаки равномерной сходимости рядов.

Свойства равномерно сходящихся рядов.

Изучение учебного материала

Степенные ряды и радиус их сходимости.

Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Асимптотические ряды.

Ряды Фурье.

Тема 11. Интегралы, зависящие от параметра.

Основные определения.

Предельный переход под знаком интеграла, зависящего от параметра.

Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла, зависящего от параметра.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра и признаки их сходимости.

Эйлеровы интегралы.

Интеграл и преобразование Фурье и его свойства.

Преобразование Лапласа и его свойства.

Тема 12. Кратные и поверхностные интегралы

Двойные интегралы: определение, свойства, вычисление.

Замена переменных в двойном интеграле.

Площадь поверхности.

Поверхностные интегралы 1 и 2 рода.

Тройные интегралы: определение и вычисление.

Многократные интегралы. Замена переменных в многократных интегралах.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, коллоквиумов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Оценочные материалы текущего контроля размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет в первом семестре проводится в письменной форме в виде самостоятельной работы по последнему разделу материала первого семестра. Продолжительность зачета 1,5 часа. Самостоятельная работа состоит из пяти задач, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.4, ИОПК-3.2 и ИОПК 3.4.

Примеры задач.

1. °Найти y' производную функции, заданной явно:

$$y = \ln^5(\sin(4x)) \cdot \sqrt[3]{4 - 5x - x^2}$$

2. °Найти y' производную функции, заданной неявно:

$$e^y \cdot (x^5 + y^3) = 7x$$

3. °Найти dy дифференциал функции:

$$y = \frac{5 \sin^3 x}{\arccos(7x)}$$

4. °Найти dy дифференциал функции, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции:

$$y = \log_2(u^5 \cdot v^3)$$

5. °Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\ln(x-2)} - \frac{1}{x-3} \right)$$

Экзамен в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из четырех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос третьей части дается в развернутой форме.

Четвертая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.4 и ИОПК 3.4. Ответ на вопрос четвертой части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов

Пример теоретической части билета.

1. Вопрос 1. Теорема о существовании супремума.
2. Вопрос 2. Теорема о существовании предела монотонной последовательности.
3. Вопрос 3. Необходимое и достаточное условие экстремума функции.

Пример практической части билета.

1. Задача.

Показать существование предела по теореме о монотонной и ограниченной последовательности:

$$x_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

Зачет во втором семестре проводится в письменной форме в виде самостоятельной работы по последнему разделу материала второго семестра. Продолжительность зачета 1,5 часа. Самостоятельная работа состоит из девяти задач, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.4, ИОПК-3.2 и ИОПК 3.4.

Примеры задач.

1. Найти и изобразить область определения функции:

$$u = \frac{\sqrt{x^2 - x + y^2 + 2y}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

2. Найти и изобразить линии уровня функции:

$$z = x^2 - 4y^2$$

3. Найти повторные пределы функции, если $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$:

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}$$

4. Найти и классифицировать точки разрыва функции:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 3y^2 - 4}$$

5. °Найти дифференциалы первого и второго порядка для функции:

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

6. °Найти дифференциалы первого и второго порядка сложной функции:

$$u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

7. °Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$:

$$F(x + y + z, xyz) = 0$$

8. °Найти экстремум функции:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

9. °Найти условный экстремум функции:

$$z = xy \text{ при условии } 2x + 3y - 5 = 0$$

Экзамен во втором семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из четырех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос третьей части дается в развернутой форме.

Четвертая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос четвертой части дается в развернутой форме.

Пятая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.4 и ИОПК-3.4. Ответ на вопрос пятой части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов

Пример теоретической части билета.

1. Вопрос 1. Метод неопределенных коэффициентов: разложение дроби с комплексными корнями знаменателя.

2. Вопрос 2. Площадь плоской фигуры: параметрическое задание кривой.

3. Вопрос 3. Признак Абеля для несобственного интеграла 2 рода.

4. °Вопрос 4. Теорема о существовании повторных и двойного пределов.

Пример практической части билета.

1. Задача.

Вычислить длину дуги:

$$x = \sin^3 t; y = \cos^3 t; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Зачет в третьем семестре проводится в письменной форме в виде самостоятельной работы по последнему разделу материала третьего семестра. Продолжительность зачета 1,5 часа. Самостоятельная работа состоит из пяти задач, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.4, ИОПК-3.2 и ИОПК 3.4.

Примеры задач.

1. °Задача 1.

Вычислить: $\int_C y^2 ds$, если C - арка циклоиды: $x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); 0 \leq t \leq 2\pi$

2. °Задача 2.

Вычислить: $\int_C (x^2 - y^2) dx + xy dy$, если C - отрезок прямой от $A(1,1)$ до $B(3,4)$.

3. °Задача 3.

Вычислить: $\iint_D \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, если D ограничена линиями: $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}$; $x^2 + y^2 = \pi^2$.

4. °Задача 4.

Расставить пределы интегрирования в различном порядке, если область интегрирования ограничена линиями: $y = 0, y = a, x + y = 0, x + y = 2a$.

5. Задача 5.

Перейдя к полярным координатам, расставить пределы интегрирования в различном порядке, если область интегрирования ограничена линиями: $-2 \leq x \leq 0, x^2 \leq y \leq 2 - x$.

Экзамен в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из шести вопросов. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос третьей части дается в развернутой форме.

Четвертая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос четвертой части дается в развернутой форме.

Пятая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос пятой части дается в развернутой форме.

Шестая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.4 и ИОПК-3.4. Ответ на вопрос шестой части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов

Пример теоретической части билета.

1. Вопрос 1. Переместительное свойство рядов и теорема Римана.
2. Вопрос 2. Критерий независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути.
3. Вопрос 3. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
4. °Вопрос 4. Замена переменных в двойном интеграле.
5. °Вопрос 5. Определение и свойства бэта-функции.

Пример практической части билета.

1. Задача.

Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$.

Результаты зачета оцениваются оценками «зачтено» и «незачтено».

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

В течение семестра в рамках текущего контроля оцениваются по пятибалльной системе посещаемость занятий, выполнение домашних и контрольных работ по материалу семестра, результаты коллоквиумов.

Оценка «зачтено» в промежуточной аттестации в виде зачета выставляется, если средняя оценка текущего контроля и результата зачета оказывается не ниже «удовлетворительно».

Оценки при проведении экзаменов формируются в соответствии с Приложением 1 «Оценочные материалы по дисциплине».

Если при проведении коллоквиумов по соответствующим частям в рамках текущего контроля были получены оценки не ниже «удовлетворительно», они могут быть учтены как составляющие экзаменационной оценки.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в LMS IDo^Λ

-<https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=9048>

-<https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=9050>

-<https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=31476>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

– Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т. 1, 2, 3. СПб.: Лань. 2019. 608 с., 800 с., 656 с.

– Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, т. 1, 2. М.: Физматлит. 2009. 1084 с.

– °Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: в 2-х частях. М.: Физматлит, 2005. 648 с., 164 с.

– Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ. 2009. 624 с.

– Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. В 3 т. М.: Физматлит. 2009, 496 с., 504 с., 470 с.

б) дополнительная литература:

– Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3 т. М.: МЦНМО, 2018. 412 с., 480 с., 256 с.

– Змеев О.А., Терпугов А.Ф., Якупов Р.Т. Математический анализ, ч.1,2,3. Томск: НТЛ. 2007. 172 с, 169 с., 151 с.

– Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб: Профессия. 2008. 432 с.

– Марголис Н.Ю. Пределы. Изд-во ТГУ. 2016. 32 с.

– Марголис Н.Ю. Несобственные интегралы. Изд-во ТГУ. 2000. 18 с.

– Гендрина И.Ю., Завгородняя М.Е., Колосова О.А. Несобственные интегралы I и II рода. Изд-во ТГУ. 2007. 30 с.

– Гендрина И.Ю., Завгородняя М.Е., Колосова О.А. Интегралы, зависящие от параметра. Изд-во ООО «Лито-принт». 2009. 36 с.

– Терпугов А.Ф. Суммирование степенных рядов. Изд-во ТГУ. 1990. 17 с.

– Терпугов А.Ф. Вычисление и преобразование двойных интегралов. Изд-во ТГУ. 1990. 17 с.

– Терпугов А.Ф. Вычисление и преобразование тройных и многократных интегралов. Изд-во ТГУ. 1992. 17 с.

– Тривоженко Г.В., Туренова Е.Л. Производные и дифференциалы функций многих переменных. Изд-во ТГУ. 2004. 15 с.

в) ресурсы сети Интернет:

- °Открытые онлайн-курсы
- °Лекции, примеры решения задач, интегралы и производные, дифференцирование, ТФКП, Электронные учебники. Типовой расчет из задачника Кузнецова. <http://www.matclub.ru>
- °Математический анализ. Электронный ресурс 2 / под ред. В.А. Садовниченко <http://chamo.lib.tsu.ru/lib/item?id=chamo:238653&theme=system>
- °Математика. <http://chamo.lib.tsu.ru/lib/item?id=chamo:238652&theme=system>
- Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовнический В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3 т. М.: МЦНМО, 2018. 412 с., 480 с., 256 с. <http://sun.tsu.ru/limit/2016/000132365/000132365.pdf>
- Проекты лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН – <http://etudes.ru/>
- Проекты лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН – <http://book.etudes.ru/>
- Проекты лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН – <http://tcheb.ru/>

13. Перечень информационных технологий

- а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:
 - Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
 - публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).
- б) информационные справочные системы:
 - Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
 - Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
 - ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
 - ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
 - Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
 - ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
 - ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Гендрина Ирина Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.