

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:  
Директор  
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Математический анализ

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**Математическое моделирование и информационные системы**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Бакалавр**

Год приема  
**2024**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
К.И. Лившиц

Председатель УМК  
С.П. Сущенко

Томск – 2024

## **1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4 Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2 Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3 Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4 Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

## **2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

В рамках текущего контроля оцениваются: посещаемость, выполнение домашних работ, выполнение контрольных работ, выступление с докладами. Оценивание производится по пятибалльной шкале.

Посещение.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
90%-100% занятий	75% - 89,9% занятий	65% - 74,9% занятий	Менее 65 % занятий

Домашние работы.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Опоздание не более 5 дней	Опоздание от 6 до 16 дней	Опоздание от 17 до 30 дней	Опоздание более 30 дней

Контрольные работы.

Каждое задание оценивается по пятибалльной шкале, оценка за контрольную выставляется как среднее арифметическое.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Приведено полное обоснованное решение	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.	Решение не соответствует задаче или отсутствует.

#### Коллоквиумы.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Ответ на вопрос выполнен без недочетов..	Ответ на вопрос присутствует, но имеются не принципиальные неточности в рассуждениях.	Ответ на вопрос присутствует, но допущены принципиальные ошибки.	Ответ не соответствует вопросу или отсутствует.

Выступление с докладом повышает среднюю арифметическую оценку за семестр на 0,5 балла.

Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Контрольная работа №1 (первый семестр)

1. Доказать по ММИ:

$$2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2 + 9n + 1)}{6}.$$

2. С помощью биннома Ньютона получить разложение:

$$\left(2x - \frac{y}{3}\right)^5.$$

3. Доказать по определению, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3}{n^2 + 2} = 4.$$

4. Вычислить:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n}.$$

5. Доказать, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$  по ТПМОП, если

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{7^n}\right).$$

6. Доказать  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$  по критерию Б-К, если

$$x_n = \frac{\cos(1)}{1!} + \frac{\cos(2)}{2!} + \dots + \frac{\cos(n)}{n!}.$$

Контрольная работа №2 (первый семестр)

1. Записать на языке  $\varepsilon - \delta$ :  $f(x) \rightarrow b - 0$  при  $x \rightarrow a + 0$ .
2. Доказать по определению:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-2)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 + x - 6} = 0$$

3. Вычислить:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 - 1}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 - 1}}$ .

4. Вычислить:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) - 1}{\operatorname{tg}^2 x}$ .

5. Вычислить:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+x)}$ .

6. Вычислить:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$ .

7. Вычислить:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}$ .

8. Вычислить:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(2-x) + \sin(x-2)^2}{x^2 - 4}$ .

Контрольная работа №1 (второй семестр)

1. Найти  $y'_x$  и  $y''_x$ :  $x(t) = \frac{e^t}{1+t}$ ,  $y(t) = (t-1)e^t$ .
2. Найти  $dy$  и  $d^2y$ :  $y = u \ln v$ , если  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ .
3. Найти  $d^8y$ :  $y = (2x^2 + 1)sh^2x$ .
4. Вычислить, используя стандартные разложения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \ln(1+x^2)}{x^3 + \sqrt{1+3x^3} - 1}$$

5. Разложить по формуле Маклорена:  $y(x) = x^3 \sqrt{4-4x}$ .
6. Построить график функции:  $r = \cos 3\varphi$ .
7. Записать число в тригонометрической форме:  $z = (2 - \sqrt{3}i)^{60}$ .
8. Найти все корни и записать в показательной форме:

$$z^6 = \sqrt{2} + 2i.$$

9. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$$3 < |z - 3 + 4i| \leq 5.$$

Контрольная работа №2 (второй семестр)

Вычислить интегралы.

1.

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

2.

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

3.

$$\int e^{3x} \cos 5x dx$$

4.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{6 - 7x^3 + 2x^6}}$$

5.

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 8} dx$$

6.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

7.

$$\int \frac{x - \sqrt{2x^2 + 3x + 5}}{\sqrt{4x^2 + 6x + 10}} dx$$

8.

$$\int \frac{dx}{(2 - \sin x) \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

9.

$$\int \sin x \cos 3x dx$$

Контрольная работа №3 (второй семестр)

1. Найти площадь плоской фигуры:

$$y^2 = 2px; x^2 + y^2 = R^2 .$$

2. Вычислить длину дуги:

$$x = a \left( \cos t + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} \right) \right); y = a \sin t; 0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

3. Найти объем тела вращения вокруг  $OY$ :

$$y = b \left( \frac{x}{a} \right)^2; y = b \left| \frac{x}{a} \right|; a > 0; b > 0.$$

4. Найти площадь поверхности вращения кривой вокруг оси  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ :  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .

Контрольная работа №4 (второй семестр)

1. Вычислите по определению:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 15} dx$$

2. Исследуйте на сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x \cdot \sqrt[3]{x} + 15} dx$$

3. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость:

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{x})^p \cdot \sin(x^5) dx$$

Контрольная работа №1 (третий семестр)

1. Исследовать сходимость ряда по определению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}} \right)$$

2. Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)^n$$

3. Исследовать сходимость ряда, используя признаки сравнения:

$$a_n = \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$$

4. Исследовать сходимость ряда по признаку Даламбера или Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} (2n)!}{5^{2n} (n!)^4}$$

5. Исследовать сходимость ряда по признаку Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right)^2 \frac{1}{n^3}$$

6. Исследовать сходимость ряда по признаку Гаусса:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)n^\alpha}, \quad \beta > 0$$

7. Исследовать сходимость по признаку Коши-Маклорена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^n}}$$

8. Доказать расходимость по критерию Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+5}$$

9. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + (-1)^n)^\alpha}$$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Контрольная работа №2 (третий семестр)

1. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \right]^p \left( \frac{x}{2} \right)^n$ .

2. Разложить функцию в ряд по степеням  $1-x$ :  $f(x) = \frac{1}{6-5x+x^2}$ .

3. Используя предварительное дифференцирование, разложить функцию в ряд по степеням  $x$ :

$$f(x) = x \cdot \arcsin x + x \cdot \arctg x$$

4. Найти сумму ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ .

Контрольная работа №3 (третий семестр)

1.

а) Найти производную:  $\int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx$ .

б) Вычислить, используя дифференцирование или интегрирование по параметру:

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin \alpha x}{x} \right)^2 dx.$$

2. Выразить через эйлеровы интегралы, указав область существования:  $\int_0^{+\infty} x^p e^{-\alpha x^2} dx$ .

3. Разложить в интервале  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  по косинусам нечетных дуг:  $f(x) = \frac{x}{2}(x + \pi)$ .

### 3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Промежуточная аттестация в виде зачета оценивается следующим образом.

Выставляется оценка за каждое задание в самостоятельной работе в соответствии с таблицей:

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Приведено полное обоснованное решение	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или	Решение не соответствует задаче или отсутствует.

	целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.	доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.	
--	--	---	--

Полученная оценка усредняется с оценками текущего контроля. Тем самым в процессе формирования итоговой оценки учитываются оценки за приобретаемые компетенции.

Оценка «зачтено» выставляется, если итоговый результат оказывается не ниже 2,5. В противном случае выставляется «незачтено».

Промежуточная аттестация в виде экзамена оценивается следующим образом.

Каждый вопрос билета, кроме последнего, оценивается в соответствии с таблицей:

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Ответ на вопрос выполнен без недочетов..	Ответ на вопрос присутствует, но имеются принципиальные неточности в рассуждениях.	Ответ на вопрос присутствует, но допущены принципиальные ошибки.	Ответ не соответствует вопросу или отсутствует.

Если в рамках текущего контроля сданы коллоквиумы с оценками не ниже «удовлетворительно», то эти оценки могут быть использованы по желанию обучающегося в качестве оценок за соответствующие вопросы.

Последний вопрос билета оценивается в соответствии с таблицей:

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Приведено полное обоснованное решение	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.	Решение не соответствует задаче или отсутствует.

К полученным оценкам добавляется усредненная оценка текущего контроля, тем самым в процессе формирования итоговой оценки учитываются оценки за приобретаемые компетенции. Итоговая оценка является результатом усреднения всех используемых оценок, округленным по правилам округления. Если итог составляет 2,5; 3,5 или 4,5, то округление производится в пользу обучающегося – в большую сторону.

Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Вопросы к экзамену (первый семестр)

1. Мощность множества. Счетные и континуальные множества.
2. Рациональные и вещественные числа.
3. Точные грани числовых множеств
4. Предел последовательности и его свойства.

5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Предельный переход в неравенствах.
6. Предел монотонной последовательности. Лемма о вложенных отрезках. Бином Ньютона. Число «е» как предел последовательности.
7. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.
8. Предел функции и его свойства. Замечательные пределы. Признаки существования предела функции. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций.
9. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва функции. Теоремы о непрерывных функциях.
10. Равномерная непрерывность функции. Обратная функция.
11. Непрерывность элементарных функций.
12. Определение и геометрический смысл производной.
13. Таблица производных.
14. Теоремы о функциях, имеющих производную.
15. Производные высших порядков и их свойства.
16. Дифференциал и дифференцируемость функции.
17. Дифференциалы высших порядков.
18. Дифференциалы сложных функций.
19. Формула Тейлора.
20. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей.
21. Исследование функции на монотонность и экстремум.
22. Выпуклость и точки перегиба графика функции.
23. Асимптоты графика функции.

Задачи к экзамену (первый семестр)

1. Доказать по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1.$$

2. Вычислить:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n - n^3}{(3n + 1)^3}.$$

3. Показать существование предела по теореме о монотонной и ограниченной последовательности:

$$x_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

4. Доказать сходимость по критерию Коши:

$$x_n = \frac{\sin(1 \cdot 2)}{1 \cdot 2} + \frac{\sin(2 \cdot 3)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin(n \cdot (n+1))}{n(n+1)}$$

5. Найти область определения функции:

$$y = \sqrt[8]{\frac{7}{x}} - 1 + \ln(x^2 - 4x + 3)$$

6. Доказать по определению и изобразить графически с « $\varepsilon - \delta$ » окрестностями:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6 - 3x) = 3$$

7. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(5x^2 + x - 4)(x - 2)}{x^2 + x}$$

8. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^3 + 5} - \sqrt{4x^3})$$

9. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1 + x)}$$

10. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^4 + 7}{3x^4} \right)^{4x^4}$$

11. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \sin \left( 2x^3 + \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\ln \left( \sin \left( 3x^3 + \frac{\pi}{2} \right) \right)}$$

12. Доказать, что при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\sqrt[3]{2x + \sqrt{3x + \sqrt{4x}}} = O(\sqrt[3]{x})$$

13. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, установить их характер:

$$y = \frac{6}{1 - 37^{-x}}$$

14. Найти  $y'$  производную функции, заданной явно:

$$y = \frac{\ln^6(\sin(5x))}{\sqrt[3]{4 - 7x - x^2}}$$

15. Найти  $y'$  производную функции, заданной неявно:

$$e^{\sin y} \cdot (x^4 + y^5) = 7 \cos x$$

16. Найти дифференциал функции:

$$y = \frac{5^{\cos^3 x}}{\operatorname{arccotg}(7x)}$$

17. Найти  $dy$  дифференциал функции, где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – функции:

$$y = \sqrt{(u^5 \cdot v^3)}$$

18. Вычислить пределы функций с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{\ln(x-2)} - \frac{1}{x^2-9} \right)$$

19. Найти все корни и записать в показательной форме:

$$z^4 = -3 + \sqrt{3}i.$$

20. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$$5 < |4 - z + \sqrt{5}i| < 7.$$

21. Доказать по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

Вопросы к экзамену (второй семестр).

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Таблица интегралов и основные методы интегрирования.
3. Интегрирование рациональных дробей, иррациональных и тригонометрических функций.
4. Интегральная сумма и определенный интеграл.
5. Суммы Дарбу и признак существования определенного интеграла.
6. Свойства интегрируемых функций и определенного интеграла.
7. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Определенный интеграл как функция верхнего предела интегрирования и теоремы о среднем.
9. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление длин дуг плоских кривых, площадей плоских фигур, объемов, площадей поверхностей вращения.
10. Определение и свойства несобственного интеграла 1 рода.
11. Признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода. Лемма Бореля.
12. Особые точки функции и определение несобственного интеграла 2 рода.
13. Главные значения несобственных интегралов.
14. Интегралы Фруллани.
15. Основные определения. Предел и непрерывность функции многих переменных.
16. Двойные и повторные пределы.
17. Производные и дифференциал функции многих переменных.

18. Неявные функции одной и многих переменных: существование и дифференцируемость
19. Система неявных функций.
20. Производные и дифференциалы высших порядков.
21. Формула Тейлора.
22. Экстремум функции многих переменных.
23. Метод неопределенных множителей Лагранжа решения задачи на условный экстремум функции многих переменных.

Задачи к экзамену (второй семестр).

1. Вычислить:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^4 - 4}} x dx$$

2. Вычислить:

$$\int x^2 \arccos 2x dx$$

3. Вычислить:

$$\int \sin 5x \operatorname{ch} 2x dx$$

4. Вычислить:

$$\int \frac{(x - 3) dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}$$

5. Вычислить:

$$\int \frac{3x^2 - x + 1}{(x^2 - 9)(x^2 + 9)} dx$$

6. Вычислить:

$$\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{2 - 3x + x^2}}$$

7. Вычислить:

$$\int (5 - 2x^2)^{\frac{2}{3}} x^3 dx$$

8. Вычислить:

$$\int \frac{dx}{3 \sin x - 2 \cos x}$$

9. Вычислить:

$$\int \operatorname{ctg} x dx$$

10. Найти площадь плоской фигуры:

$$y = |x - 1|; y = 3 - |x|$$

11. Найти площадь плоской фигуры:

$$r = 2 + \cos \phi .$$

12. Вычислить длину дуги:

$$x = \sin^3 t; y = \cos^3 t; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} .$$

13. Вычислите по определению:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 15} dx$$

14. Исследуйте на сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg(x^2)}{x \cdot \sqrt[3]{x} + 15} dx$$

15. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость:

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{x})^p \cdot \sin(x^5) dx$$

Вопросы к экзамену (третий семестр).

1. Основные определения.
2. Свойства рядов.
3. Признаки сходимости рядов.
4. Сочетательное свойство сходящихся рядов.
5. Переместительное свойство рядов и теорема Римана.
6. Умножение рядов.
7. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
8. Признаки равномерной сходимости рядов.
9. Свойства равномерно сходящихся рядов.
10. Степенные ряды и радиус их сходимости.
11. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
12. Действия со степенными рядами.
13. Определение и вычисление криволинейных интегралов 1 и 2 рода.
14. Критерий независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути.
15. Интегралы по простым контурам.
16. Двойные интегралы: определение, свойства, вычисление.
17. Замена переменных в двойном интеграле.
18. Площадь поверхности.
19. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода.
20. Тройные интегралы: определение и вычисление.
21. Интегралы, зависящие от параметра: основные определения.
22. Предельный переход под знаком интеграла, зависящего от параметра.
23. Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла, зависящего от параметра.
24. Несобственные интегралы, зависящие от параметра и признаки их сходимости.
25. Эйлеровы интегралы.

Задачи к экзамену (третий семестр).

1. Исследовать сходимость ряда по определению:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ .

2. Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ .

3. Исследовать сходимость ряда, определив порядок убывания  $a_n$ :  $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$ .

4. Исследовать сходимость ряда по одному из признаков Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{(\ln(n+1))^{n/2}}$ .

5. Исследовать сходимость ряда по интегральному признаку:  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+5}{n}$ .

6. Доказать расходимость ряда по критерию Больцано-Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}.$$

7. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\sqrt{n} + \sin n)}$$

8. Определить область абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \right]^2 \left[ \frac{1-x}{1+x} \right]^n.$$

9. Исследовать характер сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-1}{x^n}, \quad x \in [2, +\infty).$$

10. Доказать равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cdot \sin^2 \frac{1}{nx}}{4 + \ln^2 nx}, \quad x \geq 2.$$

11. Доказать равномерную сходимость по признаку Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3nx \cdot \frac{e^{-nx}}{n}, \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

12. Определить область абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left[ \frac{1-x}{1+x} \right]^n.$$

13. Разложить функцию в ряд по степеням  $x$ , определить радиус и интервал сходимости:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}.$$

14. Убедиться в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и вычислить интеграл:

$$\int_{(1,1)}^{(3,3)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

вдоль путей, не проходящих через начало координат.

15. Расставить в различном порядке пределы интегрирования в двойном интеграле по области  $\Omega$ :

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

#### **4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)**

##### **Список вопросов для оценки остаточных знаний**

1. Мощность множества. Счетные и континуальные множества.
2. Рациональные и вещественные числа.
3. Точные грани числовых множеств
4. Первообразная и неопределенный интеграл.
5. Таблица интегралов и основные методы интегрирования.
6. Интегрирование рациональных дробей, иррациональных и тригонометрических функций.
7. Свойства рядов.
8. Признаки сходимости рядов.
9. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
10. Площадь поверхности.

##### **Информация о разработчиках**

Гендрина Ирина Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра прикладной математики ИПМКН, доцент