

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Стохастический анализ
по направлению подготовки

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная и прикладная физика»

03.04.02 Физика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
О.Н. Чайковская

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ПК 1– Способен самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего российского и зарубежного опыта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИПК 1.1 –Знает основные стратегии исследований в выбранной области физики, критерии эффективности, ограничения применимости.

ИПК 1.2 – Умеет выделять и систематизировать основные цели исследований в выбранной области физики, извлекать информацию из различных источников, включая периодическую печать и электронные коммуникации, представлять её в понятном виде и эффективно использовать.

ИПК 1.3 – Владеет навыками аналитической переработки информации, проведения исследований с помощью современной аппаратуры и информационных технологий, обобщения и представления результатов, полученных в процессе решения задач исследования.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля.

I. По дисциплине «Симметрия дифференциальных уравнений» предусмотрены тесты по разделам: Темы 1-2 (ИПК 1.1, ИПК 1.2). Тесты размещены в системе LMS Moodle ТГУ (Learning Management System Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) по ссылке: <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=21972>

Тесты по курсу составлены на основе банка вопросов в курсе Moodle.

Пример теста по теме 1 курса.

Вопрос: В системе из n частиц координата X частицы изменяется на величину Δ за время τ . Введя частоту повторяемости смещения Δ , записать число частиц dn со смещением в интервале от Δ до $\Delta + d\Delta$.

Варианты ответа: 1) $dn = n d\Delta$, 2) $dn = n \Delta d\Delta$, 3) $dn = n \phi(\Delta) d\Delta$, где $\phi(\Delta) d\Delta$ - доля частиц со смещением в интервале от Δ до $\Delta + d\Delta$.

Ключи: 3).

Критерии оценивания: Прохождение теста при правильном ответе (100%) оценивается в 5 баллов. Максимальная оценка 100%; выбор ответа 3) оценивается в 100%; выбор ответа 1), или 2) оценивается в 0%.

II. По Темам 1-11 в курсе предусмотрены Задания (ИПК 1.1, ИПК 1.2., ИПК 1.3).

Пример Задания по Теме 1.

Задание по теме 1.

Дать ответы (в виде файла или текста) на следующие контрольные вопросы по теме. Контрольные вопросы:

1. Описать характер одномерного движения броуновской частицы. Сформулировать предположения Эйнштейна, положенные в основу теории броуновского движения.
2. Сформулировать свойство повторяемости флуктуаций координат частиц.
3. Какими величинами описывается броуновское движение?
3. Вывести уравнение Эйнштейна для функции числа частиц.
4. При каких условиях получается уравнение диффузии. Какой вид имеет коэффициент диффузии.

Студенты выполняют задание в форме эссе.

Критерии оценивания: Представленный файл эссе оценивается по форме элемента Задание системы Moodle: «простое непосредственное оценивание» по шкале в форме Pass/Fail (зачтено/не зачтено).

III. Контрольная работа по курсу проводится в виде решения 2х задач из банка задач (ИПК 1.1, ИПК 1.2). Примеры задач из контрольных работ.

Задача 1. Предположим, что измеряемая некоторым сенсором величина заряда $I(t)$ в момент времени t представляет собой сумму дискретных импульсов, достигающих сенсора в различные моменты времени t_k . Записать величину заряда, накопившегося на сенсоре к моменту времени t , начиная с нулевого момента $t=0$.

Ключ: Величина заряда равна: $I(t) = \sum_k F(t - t_k)$, где $F(t - t_k)$ - вклад заряда,

порождаемого на сенсоре импульсом, приходящим на сенсор в момент времени t_k . Все импульсы имеют одинаковую форму, описываемую модельной функцией $F(t)$.

Задача 2. Предположив, что моменты времени t_k , в которые импульс приходит на сенсор случайны, записать условие для вероятности $P(n, t)$ числа импульсов n , пришедших на сенсор в момент t . Предполагается, что импульсы приходят на сенсор независимо друг от друга.

Ключ: Вероятность прибытия импульса на сенсор на некотором временном интервале длительностью Δt не зависит от t , n и пропорциональна Δt . С помощью подходящей постоянной λ вероятность записывается как $\lambda \Delta t$. При сделанных предположениях из условия полной вероятности получаем:

$$P(n, t + \Delta t) = P(n, t)(1 - \lambda \Delta t) + P(n - 1, t)\lambda \Delta t.$$

Критерии оценивания: результаты контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если студент предъявляет правильные письменные решения двух задач, то есть для каждой задачи способен обосновать метод решения, понимает используемые термины и формулы и получил правильный ответ. При невыполнении указанных критериев оценки «зачтено» выставляется оценка «не зачтено».

IV. Для углубленного изучения курса по основным разделам курса студентам предлагаются темы для рефератов (ИПК 1.1, ИПК 1.2., ИПК 1.3).

Темы для рефератов и учебно-методическая литература для самостоятельной работы по разделам дисциплины «Стохастический анализ»:

Задача реферата – объяснить базовые представления о моделировании физических систем со случайными параметрами, со случайными внешними воздействиями, освоить методы анализа стохастических моделей и процессов в физике.

Тема 1. Приближенные методы в теории диффузионных процессов.

– Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 528 с.

– ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. — М.: Высшая школа, 1990. — 376 с.

– Кингман Дж. Пуассоновские процессы. — М.: МЦНМО, 2007. — 136 с.

– Ватанабэ, С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986. — 445 с.

Тема 2 Нелокальное обобщение уравнения Фоккера-Планка. Квазиклассические асимптотики.

– Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 528 с.

– ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. — М.: Высшая школа, 1990. — 376 с.

- Кингман Дж. Пуассоновские процессы. — М.: МЦНМО, 2007. — 136 с.
- Рёпке Г. Неравновесная стохастическая механика. — М.: Мир, 1990. — 320 с.
- Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1990. — 376 с.
- Трифонов А.Ю. Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова в квазиклассическом приближении/ А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов. В Сб. Трудов 9-ой Международной Конференции "Математика.Компьютер. Образование", под ред. Г.Ю. Ризниченко, в 2-х томах. Издательство "Регулярная и хаотическая динамика"— Москва – Ижевск, 2002. т. 2. С. 356-367. Дубна, 28.01-02.02.2002 г.
- Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. -- М., Мир, 1988.
- Shapovalov A.V., Trifonov A. Yu., and Masalova E.A. Nonlinear Fokker–Planck Equation in the Model of Asset Returns// SIGMA (Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications). 2008. V.4. Paper 038, 10 pp./http://www.emis.de/journals/SIGMA/.
- Shapovalov A.V., Rezaev R.O., Trifonov A.Yu., Symmetry operators for the Fokker–Planck–Kolmogorov equation with nonlocal quadratic nonlinearity, SIGMA 3 (2007), 005, 16 pages, math-ph/0701012.

Тема 3 Аномальная диффузия и уравнения дробного порядка.

- Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 528 с.
- ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. — М.: Высшая школа, 1990. — 376 с.
- Кингман Дж. Пуассоновские процессы. — М.: МЦНМО, 2007. — 136 с.
- Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. – 512 с.
- Samko S.G. Fractional integrals and derivatives/S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev. — San Francisco: Taylor Francis, 1993 ; 1016 pp.
- Kilbas, A.A.; Srivastava, H.M.; Trujillo, J.J. Theory and applications of fractional differential equations/ A.A. Kilbas, Y.M. Srivastava, J.J. Trujillo. —Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.

Тема 4 Квантовые марковские процессы.

- Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 528 с.
- Холево А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. — М.: Институт космических исследований, 2003. 410 с.
- Хренников А.Ю. Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика. — М.: Физматлит, 2003. 208 с.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

В курсе «Стохастический анализ» используется балльно-рейтинговая система оценки знаний. Максимальная сумма баллов по дисциплине составляет 100 баллов и формируется следующим образом: 60 баллов по результатам текущей аттестации и 40 баллов по результатам промежуточной аттестации (экзамен). Итоговая оценка по дисциплине складывается из суммы баллов, полученной по итогам текущего контроля и промежуточной аттестации (устного экзамена).

Текущая аттестация включает:

- активность студента на практических занятиях (0-15 баллов); весь семестр разбит на 3 этапа по четыре недели, баллы выставляются в конце каждого этап (0-5 баллов).
- результаты выполнения контрольных работ (0-15 баллов),
- реферат (0-20 баллов), при невыполнении срока сдачи реферата за каждую просроченную неделю снимается 5 баллов;

– результаты коллоквиума (0-10 баллов).

Промежуточная аттестация проводится в форме устного экзамена который предусматривает дифференцированное оценивание ответа (0-40 баллов).

Экзамен в 3 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Билет содержит два теоретических вопроса, проверяющие компетенции ПК 1.1, в соответствии с индикаторами достижения компетенций ИПК 1.1, ИПК 1.2.. После ответа на билет студент отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов, направленные на проверку достижения индикаторов ИПК 1.2 и ИПК 1.3.

Примерный перечень теоретических вопросов.

Вопрос 1. Шумы в сигналах, понятие о дробовом шуме. Сформулируйте основные идеи подхода Шоттки к описанию дробового шума. Какую роль играет распределение Пуассона в теории дробового шума.

Вопрос 2. Объясните понятия моментов распределения. Что такое производящая функция моментов и производящая функция распределения.

Отметка в 40 баллов ставится студенту при правильном ответе не менее чем на 80% вопросов билета и дополнительных вопросов.

Открытый перечень вопросов, выносимых на зачет.

1. Примеры стохастических процессов. Броуновское движение. Эйнштейновское описание броуновского движения.
2. Движение частицы под действием флуктуационной силы. Уравнение Ланжевена.
3. Закон действующих масс. Кинетические уравнение.
4. Пример: уравнение Вольтерра-Лоттки.
5. Вероятности перехода. Управляющее уравнение.
6. Случайные переменные. Совместные вероятности. Условные вероятности. Формулы Байеса.
7. Средние и высшие моменты. Характеристическая функция моментов. Корреляционные функции.
8. Нормальное распределение и центральная предельная теорема.
9. Целочисленные случайные переменные и распределение Пуассона.
10. Виды предельных переходов на вероятностном пространстве. Марковский процесс.
11. Стохастический процесс. Понятие о марковском процессе. Пример: радиоактивный распад.
12. Дискретное и непрерывное пространства состояний. Математическая модель непрерывного марковского процесса. Уравнение Чепмена-Колмогорова и его свойства.
13. Уравнение Фоккера-Планка. Управляющее уравнение.
14. Скачкообразные и диффузионные процессы. Уравнение Лиувилля. Обратные уравнения.
15. Стационарные и однородные процессы.
16. Одномерные случайные блуждания.
17. Процесс Орнштейна-Уленбека. Пример стационарного распределения.
18. Характеристическая функция. Корреляционные функции.
19. Динамическое уравнение со случайной силой. Винеровский процесс.
20. Стохастический интеграл.
21. Стохастические интегралы Ито и Стратоновича.
22. Свойства стохастических интегралов.
23. Стохастические дифференциальные уравнения. Уравнения Ито и Стратоновича.
24. Связь стохастического дифференциального уравнения с уравнением Фоккера-Планка.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест (ИПК-1.1.).

В подходе Ланжевена положение частицы $x(t)$ описывается законом Ньютона со случайной силой X : $m\ddot{x} = -6\pi\eta a \dot{x} + X$.

Вопрос: Каким условиям удовлетворяет случайная сила X ?

Варианты ответа: а) X линейно зависит от координаты частицы $x(t)$, б) X не зависит от координаты частицы $x(t)$, в) среднее значение удовлетворяет условию $\langle Xx(t) \rangle = 0$.

Ключи: в).

Задачи (ИПК-1.2, ИПК 1.3).

Задача 1. Получите уравнение для среднего значения $\langle x^2(t) \rangle$ из уравнения Ланжевена.

Является ли это уравнение стохастическим?

Ответ. Умножим уравнение Ланжевена на $x(t)$ и усредним полученное уравнение.

Учитывая условие $\langle Xx(t) \rangle = 0$, получим уравнение на $\langle x^2(t) \rangle$ в виде: $\frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} + 3\pi\eta a \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = kT$.

Это уравнение не содержит случайных величин и не является стохастическим. Оно является детерминированным.

Задача 2. Из интегрирования уравнения для среднего от квадрата координаты частицы, $\langle x^2(t) \rangle$, следует: $\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{kT}{3\pi\eta a} + C \exp(-t/t_0)$, $t_0 = \frac{m}{6\pi\eta a}$, где C - произвольная постоянная интегрирования. Каков физический смысл постоянной C ?

Ответ. Подстановка физических констант и характерных для броуновской частицы значений m и a дает оценку величины t_0 равную $t_0 = 10^{-8}$ с. Характерное время наблюдения изменений в движении броуновской частицы ~ 1 с. Тогда $\exp(-t/t_0) \ll 1$ и выражением $C \exp(-t/t_0)$ можно пренебречь, т.о. вопрос об интерпретации постоянной C теряет смысл.

Теоретические вопросы (ИПК 1.1, ИПК 1.3):

1. Опишите процессы в модели хищник-жертва. Запишите кинетические уравнения для численностей популяций в этой модели.
2. Опишите качественно поведение решений кинетических уравнений в системе хищник-жертва.
3. Опишите вывод управляющего уравнения в модели системе хищник-жертва.
4. Объясните смысл условной вероятности и поучите соотношения Байеса.
5. Для заданного конечного набора событий запишите условие независимости событий.
6. Пусть для всякой детерминированной функции f (из какого класса?) от случайной величины X известно среднее (матожидание) $\langle f(X) \rangle$. Можно ли найти распределение вероятностей $P(X)$?
7. Для многомерной случайной величины запишите выражение корреляционной матрицы и объясните ее смысл.
8. Запишите выражение для производящей функции моментов. Запишите условия, которым удовлетворяет производящая функция.
9. Объясните, что такое марковский случайный процесс. Запишите условие Маркова для условных вероятностей.
10. Запишите уравнения на вероятность распада радиоактивного вещества как марковского процесса.
11. Используя условие Маркова, получите уравнение Чепмена-Колмогорова.
12. При каких условиях из дифференциального уравнения Чепмена-Колмогорова получается уравнение Фоккера-Планка?

13. При каких условиях из дифференциального уравнения Чепмена-Колмогорова получается управляющее уравнение?
14. При каких условиях из дифференциального уравнения Чепмена-Колмогорова получается уравнение Лиувилля?
15. Объясните условия, при которых марковский процесс является стационарным.
16. При каких условиях марковский процесс является однородным.

Информация о разработчиках

Шаповалов Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики ФФ НИ ТГУ.