

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Теория вероятностей

по направлению подготовки

10.03.01 Информационная безопасность

Направленность (профиль) подготовки:
Безопасность компьютерных систем

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
В.Н. Тренькаев

Председатель УМК
С.П. Сущенко

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-3. Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач, формулируемых в рамках базовых математических дисциплин, которые обеспечивают возможность решения задач профессиональной деятельности.

ИОПК-3.2. Осуществляет применение основных понятий, фактов, концепций, принципов математики и информатики для решения задач профессиональной деятельности.

ИОПК-3.3. Выявляет научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и применяет соответствующий математический аппарат для их формализации, анализа и выработки решения.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа.

Примеры задач для аудиторных занятий / контрольных работ по теме «Случайные события. Теоремы суммы и произведения»

1. В урне три белых и пять черных шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что эти шары разных цветов?

2. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект а) будет обнаружен; б) не будет обнаружен; в) хотя бы один раз обнаружен.

3. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 игранных. Для игры выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются ещё два мяча. Найти вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

4. В партии из десяти изделий два бракованных. Наудачу выбирают пять изделий. Какова вероятность того, что среди них одно бракованное?

5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.9. Найти вероятность того, что в результате двух выстрелов будет хотя бы одно попадание.

6. Имеется 2 партии изделий. Первая содержит 20 изделий первого сорта и 5 изделий второго сорта, вторая содержит 15 изделий первого сорта и 10 изделий второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что взяты изделия одного сорта.

Примеры задач для аудиторных занятий / контрольных работ по теме «Дискретные и непрерывные случайные величины»

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.5, для второго – 0.6. X – число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины X : а) найти распределение и функцию распределения; построить графики; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, моду M_0 , медиану M_e ; в) найти вероятность $P(X < M(X))$; г) найти вероятности $P(X \in [0.9, 2))$, $P(X \in [0.4, 1))$.

2. Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ b, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу b ; функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести $F(1/3)$; $F(1/2)$; в) MX ; г) DX ; д) $P(1/3 < X < 1/2)$. Начертить графики $f(x)$, $F(x)$. Найти моду и медиану распределения.

3. Весы для тяжелых предметов считаются годными, если отклонение X от контрольного веса на более чувствительных весах не превышает 18 г. Величина X – нормально распределенная и $M(X)=0$, $D(X)=10$ г. Сколько процентов пригодных весов изготавливает завод? Ответ округлить до целых.

4. Из коробки, содержащей 3 синих и 4 красных карандаша, наудачу вынимают 3 карандаша. X – число красных карандашей среди вынутых. Требуется для дискретной случайной величины X : а) найти распределение и функцию распределения; построить графики; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, моду M_0 , медиану M_e ; в) найти вероятность $P(X > M(X))$; г) найти вероятности $P(X \in [1, 3))$, $P(X \in [0.1, 2.5))$.

5. Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2), & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x < 2, x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) константу a ; б) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести значения $F(-1/2)$, $F(1/2)$; в) $M(X)$; г) $D(X)$; д) $P(-1/2 < X < 2)$. Начертить графики $f(x)$, $F(x)$. Найти моду и медиану распределения.

6. Компоненты изготавливаемого лекарства отвешиваются на весах, ошибка X которых распределена нормально, причём $M(X)=0$, $\sigma(X)=0.0003$ г. Норма веса лекарства 0.02 г. Определить вероятность отбракования лекарства, если максимально допустимый вес принятого к использованию лекарства 0.021 г.

Примеры задач для аудиторных занятий / контрольных работ по теме «Функции от СВ. Системы СВ»

1. Найти распределение величины $Y = aX + b$, если плотность вероятности СВ X имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$.

2. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале (a, b) . Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

3. Случайные величины ξ и η принимают значения из множеств $\{0, 2, -2\}$ и $\{0, 1, 4\}$ соответственно. Вероятности различных сочетаний даются табл.

ξ	-2	-2	-2	0	0	0	2	2	2
η	0	1	4	0	1	4	0	1	4
p	1/16	1/16	1/4	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4

Определить: а) являются ли ξ и η независимыми? коэффициент корреляции $r(\xi, \eta)$? б) Найти законы распределения ξ и η .

4. Найти распределение величины $Y = e^X$, плотность вероятности случайной величины X имеет вид: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1); \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$

5. Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $\eta = \xi^2 + 1$, если ξ - гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

6. Даны значения независимых случайных величин x и y и их вероятности:

x	0	3	4
p	0,3	0,5	0,2

y	1	2
p	0,2	0,8

Найти распределения (значения и вероятности) случайной величины $z = x - y$. Вычислить среднее значение и дисперсию.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен проводится в письменной форме по билетам. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Типовые экзаменационные билеты имеют следующий вид:

Экзаменационный билет № 1

1. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
2. Вероятность получения прибыли при заключении сделки равна $1/2$. В каком случае вероятнее получить прибыль, заключив n из $2n$ сделок или более n из $2n$ сделок?
3. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана формулой $F(x) = 1 - Ce^{-x^2}$, $x \geq 0$. Найти:
 - 1) постоянную C ;
 - 2) плотность распределения $p(x)$ случайной величины X ;
 - 3) построить графики $p(x)$ и $F(x)$;
 - 4) вероятности $P(X > 0,5)$ и $P(0,3 < X < 1)$.

Экзаменационный билет № 2

1. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин (с помощью характеристических функций).
2. Доказать, что если случайные величины $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$ независимы, положительны и одинаково распределены, то математическое ожидание
$$M \left\{ \frac{X_1 + X_2 - X_3}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7} \right\} = \frac{1}{7}.$$
3. Независимые случайные величины X и Y распределены по законам $f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-x/3}$, $x \geq 0$, $f_2(y) = \frac{1}{5}e^{-y/5}$, $y \geq 0$. Найти распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $W = X - Y$.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Описание и аксиоматическое определение случайного события.
2. Операции над событиями.
3. Классическое определение вероятности.
4. Аксиоматическое определение вероятности.
5. Формула полной вероятности.
6. Формула Байеса.
7. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.
8. Теоремы Муавра-Лапласа.
9. Теорема Пуассона.

10. Аксиоматическое определение случайных величин и их свойства.
11. Функция распределения вероятностей значений случайной величины и её свойства.
12. Плотность распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины и её свойства.
13. Примеры функций распределения случайных величин, их характеристики и параметры.
14. Многомерные случайные величины, их функции распределения, условия согласованности.
15. Условные законы распределения.
16. Преобразование одномерных случайных величин.
17. Преобразование многомерных случайных величин.
18. Математическое ожидание, его свойства.
19. Дисперсия, её свойства.
20. Кривые регрессии. Коэффициент корреляции.
21. Экспоненциальные и гауссовские случайные величины, их свойства.
22. Условное математическое ожидание.
23. Типы сходимостей последовательностей случайных величин.
24. Центральная предельная теорема в простейшей форме. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
25. Центральная предельная теорема в форме Линдеберга.
26. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова
27. Закон больших чисел в форме Чебышева и Бернулли.
28. Лемма Бореля-Кантелли – закон нуля и единицы.
29. Теорема сходимости почти наверное, если сходится ряд из абсолютных моментов.
30. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова.
31. Пуассоновский случайный процесс. Его свойства.
32. Винеровский процесс и его свойства.
33. Марковские процессы. Марковские цепи. Классификация состояний.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Не ответил на основной вопрос. Не решил задачи.	Ответил неполно на основной вопрос и на один - два из трех дополнительных вопросов. Решил одну из двух задач.	Ответил на основной вопрос и на дополнительные вопросы, но с замечаниями. Решил обе задачи.	Уверенно и правильно ответил на все основные и дополнительные вопросы. Решил обе задачи.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний содержат тестовые вопросы, теоретические вопросы и практические задачи (ОПК-3).

Примеры тестовых вопросов:

1. События $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, если:
 - a) $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \emptyset$, для любых $i \neq j$;
 - b) $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$ и $A_i + A_j = \emptyset$, для любых $i \neq j$;
 - c) $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$ и $A_i \setminus A_j = \emptyset$, для любых $i \neq j$;
 - d) нет правильного ответа.

2. Случайным событием в теории вероятностей является:

- a) всякое подмножество вероятностного пространства;
- b) измеримое подмножество пространства элементарных исходов;
- c) любое подмножество пространства элементарных исходов;
- d) нет правильного ответа.

3. В группе 30 студентов: 5 отличников, 10 хорошистов и 15 слабых студентов. Отличник сдает зачет с первого раза с вероятностью $p_1 = 0,90$, хорошист – с вероятностью $p_2 = 0,75$, а слабый студент – с вероятностью $p_3 = 0,45$. Отвечают студенты в случайном порядке. Найти вероятность того, что первый отвечающий получит зачет.

- a) 0,625;
- b) 0,90;
- c) 0,75;
- d) нет правильного ответа.
- e)

Ключи: 1 a), 2 b), 3 a).

Примерный перечень теоретических вопросов.

1. Случайное событие, операции над событиями.
2. Классическое и геометрическое определение вероятности.
3. Формула полной вероятности, формула Байеса.
4. Теоремы Муавра-Лапласа.
5. Случайные величины и их свойства.
6. Характеристики случайных величин
7. Конкретные распределения случайных величин, их характеристики и параметры.
8. Коэффициент корреляции.
9. Типы сходимостей последовательностей случайных величин.
10. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова с доказательством.
11. Закон больших чисел в форме Чебышева и Бернулли.

Примеры задач:

1. Найти по определению числовые характеристики случайной величины, имеющей нормальное распределение: $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$.

2. Пусть ξ, η, ζ – независимые случайные величины с конечными положительными дисперсиями. Могут ли быть независимыми случайные величины $\xi + \zeta, \zeta + \eta$?

Ключи: 1. $M\{\xi\} = a, D\{\xi\} = \sigma^2$. 2. Могут (использовать свойств независимых случайных величин для числовых характеристик).

Информация о разработчиках

Кошкин Геннадий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования НИ ТГУ.