

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:  
Декан  
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Методы оптимизации и вариационное исчисление для предиктивного моделирования  
по направлению подготовки

**01.04.01 Математика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**Моделирование и цифровые двойники**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Магистр**

Год приема  
**2025**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
Е.И. Гурина

Председатель УМК  
Е.А. Тарасов

Томск – 2025

## **1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ОПК-2 Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.

ПК-1 Способен разрабатывать и внедрять цифровые двойники, используя современные технологии, методы и инструменты, с учетом технических требований заказчика и специфики моделируемых объектов и процессов.

ПК-2 Способен проводить тестирование, валидацию и анализ данных цифровых двойников для обеспечения их корректной работы, оптимизации процессов и принятия решений.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИОПК 1.2 Анализирует актуальные и значимые проблемы математики и существующие подходы к их решению.

ИОПК 2.1 Анализирует, выбирает и обосновывает математические модели для решения задач в области современного естествознания, техники, экономики и управления.

ИОПК 2.2 Разрабатывает новые и/или адаптирует/совершенствует математические модели для задач современного естествознания, техники, экономики и управления под руководством более квалифицированного работника.

ИПК 1.1 Анализирует и выбирает современные технологии, методы и инструменты для проектирования и разработки цифровых двойников с учетом специфики решаемых задач.

ИПК 1.3 Разрабатывает математические модели и алгоритмы для создания математической основы цифровых двойников изделий и технических систем.

ИПК 2.2 Анализирует и интерпретирует данные, полученные от цифровых двойников, для принятия предиктивных решений и оптимизации процессов.

## **2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- коллоквиум

### **Пример заданий на контрольной по теме «Экстремальные задачи» (РООПК-1.2)**

1. Решить безусловную экстремальную задачу

$$f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2 \rightarrow \text{extr}.$$

2. Решить экстремальную задачу с ограничениями типа равенств

$$x + y + z \stackrel{1 \text{ ое}}{\rightarrow} \text{extr} \quad x + y - z = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

3. Решить экстремальную задачу с ограничениями типа неравенств

$$e^{x-y} - x - y \rightarrow \text{extr} \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

### **Пример заданий на контрольной по теме «Вариационное исчисление».**

1. Найти производную Фреше функционала  $J : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  вида  $J(x) = \cos x(0)$ .

2. Решить простейшую задачу

$$J(x) = \int_0^1 x^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{ext}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \sqrt{2}.$$

3. Решить задачу Больца

$$J(x) = \int_0^2 (2x - \dot{x}^2) dt - x^2(0) + x(2) \rightarrow \text{ext}.$$

### **Пример заданий на контрольной по теме «Оптимальное управление».**

1. Используя принцип максимума Понtryгина решить задачу Лагранжа

$$\int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min, \quad \ddot{x} - x = u, \quad x(0) = 1.$$

2. Решить задачу оптимального быстродействия

$$T \rightarrow \min \quad -1 \leq x \leq 3, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, \quad x(T) = -1.$$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполнено от 70% работы.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполнено от 50% до 70% работы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполнено менее 50% работы.

### **Вопросы к коллоквиуму (РООПК-1.1)**

1. Основные принципы оптимизации.
2. Методы безусловной оптимизации в многомерном случае.
3. Принцип Лагранжа в теории экстремальных задач.
4. Конечномерная задача с равенствами и неравенствами.
5. Дифференцирование в функциональных пространствах. Примеры.
6. Производные по Гато и Фреше. Примеры.
7. Постановка основных задач вариационного исчисления.
8. Простейшая задача вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера.
9. Задача Больца.
10. Задача Лагранжа.
11. Вариации второго порядка. Условие Якоби.
12. Постановка задачи оптимального управления.
13. Принцип максимума Понtryгина.
14. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Результаты коллоквиума определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Студент получает «отлично», если он успешно, без ошибок отвечает на вопрос. «Хорошо» ставится в случае, если ответ верен не менее, чем на 75%, «удовлетворительно» - если ответ верен не менее, чем на 50%. Если студент показывает знание менее 50%, то ставится оценка «неудовлетворительно».

## **1. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания**

Студент, имеющий зачет по всем контрольным работам курса и сдавший коллоквиум на положительную оценку, получает зачет.

### **Информация о разработчиках**

Пчелинцев Валерий Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ