

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:

Директор

А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Математическая статистика

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:

Прикладная математика и инженерия цифровых проектов

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Д.Д. Даммер

Председатель УМК

С.П. Сущенко

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- домашняя работа;

Пример домашних заданий (ОПК-1, ОПК-3)

Статистическое оценивание

Задача 1. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

Задача 2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

Задача 3. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.

Задача 4. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.25, 0.11, 2.37, 3.45 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49. Принять $\gamma=0.96$.

Задача 5. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.62, .54, 2.12, 3.72 из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять $\gamma=0.98$.

Задача 6. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема $n=100$ и выборочному среднему равному 10. Принять $\gamma=0.97$.

Задача 7. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами X и Y по следующим данным:

$X_1=1.5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3$

$Y_1=3, Y_2=2, Y_3=2.1, Y_4=1, Y_5=4$

Задача 8. Найти достаточную статистику для: параметра распределения Пуассона, для параметров равномерного в $[a,b]$ распределения, для параметров нормального распределения.

Проверка статистических гипотез

Задача 9. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости $\alpha=0.10$.

Задача 10. При 160 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 25 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.05$.

Задача 11. При 120 подбрасываниях игральной кости пятерка выпала 25 раз, а шестерка 15 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.01$.

Задача 12. Можно ли считать два потока абитуриентов однородными, если итоги экзамена по математике на каждом потоке оказались следующими:

1-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 45, 40, 70 и 35 человек;

2-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 40, 35, 65 и 30 человек.

Уровень значимости $\alpha=0.05$.

Задача 13. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha=0.1$.

Задача 14. По реализации выборки -1.56, 0.22, 2.34, 3.75 из нормального закона с дисперсией, равной 0.49, и неизвестным математическим ожиданием a проверить гипотезы $H_0: a=1.2$ и $H_1: a=2$. Принять уровень значимости $\alpha=0.01$.

Пример контрольной работы (по вариантам) (ИОПК-3.1, ИОПК-3.2, ИОПК-3.3):

Вариант 1

1. В чем отличие теории вероятностей от математической статистики. Задачи математической статистики

2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

3. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости $\alpha=0.10$.

Вариант 2

1. Порядковые статистики;

2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

3. Можно ли считать два потока абитуриентов однородными, если итоги экзамена по математике на каждом потоке оказались следующими:

1-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 45, 40, 70 и 35 человек;

2-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 40, 35, 65 и 30 человек. Уровень значимости $\alpha=0,05$.

Вариант 3

1. Эмпирическая функция распределения (э.ф.р.) для одномерной случайной величины;
2. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема $n=100$ и выборочному среднему, равному 10. Принять $\gamma=0.97$.
3. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha=0,1$.

Вариант 4

1. Общий принцип построения решающих правил.
2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.
3. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.62, .54, 2.12, 3.72 из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять $\gamma=0.98$.

Вариант 5

1. Функция информации Фишера; неравенство Рао-Крамера.
2. Найти достаточную статистику для: параметра распределения Пуассона.
3. По реализации выборки -1.56, 0.22, 2.34, 3.75 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49, и неизвестным математическим ожиданием a проверить гипотезы $H_0: a=1.2$ и $H_1: a=2$. Принять уровень значимости $\alpha=0,01$.

Вариант 6

1. Критерий согласия хи-квадрат для простой гипотезы.
2. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема $n=100$ и выборочному среднему равному 10. Принять $\gamma=0.97$.
3. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha=0,1$.

Критерии оценивания по домашней и контрольной работе:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если верно решено 90% -99% задач.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если верно решено 80% -89% задач.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если верно решено менее 80% задач.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Текущий контроль проводится в середине семестра. Задания формулируются по билетам (ИОПК-3.1, ИОПК-3.2, ИОПК-3.3).

Билет № 1

1. По реализации выборки $X_1 = 0$, $X_2 = 1,1$, $X_3 = -1,1$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,15.
2. Область $(-1,1)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на пять равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 9, 15, 12, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Вычислить выборочные среднее и дисперсию по данным п.1.
4. Найти математическое ожидание и дисперсию выборочного момента k -го порядка.
5. Показать, что выборочное среднее сходится по вероятности к математическому ожиданию случайной величины при увеличении объема выборки.

Билет № 2

1. По реализации выборки $X_1 = 0,2$, $X_2 = 1,1$, $X_3 = -1,1$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,25.
2. Область $(-2,2)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на пять равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 10, 16, 7, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Вычислить выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса по данным п.1.
4. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.
5. Доказать асимптотическую нормальность выборочного момента второго порядка.

Билет № 3

1. По реализации выборки $X_1 = 0,3$, $X_2 = 1,3$, $X_3 = -1,3$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,35.
2. Область $(-1,3)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 10, 16, 9, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Привести пример смещенной оценки.
4. Методом подстановки построить: оценки момента 2-го порядка, коэффициентов асимметрии и эксцесса.
5. Доказать асимптотическую нормальность эмпирической функции распределения.

Билет № 4

1. По реализации выборки $X_1 = 0,4$, $X_2 = 1,3$, $X_3 = -1,3$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,65.
2. Область $(-1,4)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 6, 8, 16, 9, 5. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.

4. Методом подстановки построить оценки момента 3-го порядка, центрального момента 3-порядка и вычислить их значения по данным п.1.
5. Доказать сходимость по вероятности эмпирической функции распределения к теоретической.

Билет № 5

1. По реализации выборки $X_1 = 0,5$, $X_2 = 1,4$, $X_3 = -1,4$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,75.
2. Область $(-2,5)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 6, 8, 12, 9, 5. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.
4. Методом подстановки построить оценки коэффициента асимметрии и эксцесса, вычислить их значения по данным п.1.
5. Доказать асимптотическую нормальность эмпирической функции распределения.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все пять вопросов билета. Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на четыре вопроса билета. Оценка «Удовлетворительно» - студент ответил правильно на три вопроса билета. Оценка «Неудовлетворительно» – ответ студента на менее трех вопросов билета.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Статистическое оценивание

Задача 1. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

Задача 2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

Задача 3. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.

Проверка статистических гипотез

Задача 1. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости $\alpha=0.10$.

Задача 2. При 160 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 25 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.05$.

Задача 3. При 120 подбрасываниях игральной кости пятерка выпала 25 раз, а шестерка 15 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.01$.

Информация о разработчиках

Дмитриев Юрий Глебович, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.