

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан



Л. В. Гензе

« 21 » 06 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

**Теория случайных процессов**

по направлениям подготовки

**01.03.01 Математика, 01.03.03 Механика и математическое моделирование,  
02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Направленность (профиль) подготовки :

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**

Год приема

2022, 2023

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.2.13

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Л. В. Гензе



Председатель УМК

Е. А. Тарасов

Томск – 2022

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить понятийный аппарат теории случайных процессов, овладеть основами стохастического дифференциального исчисления

– Научиться применять понятийный аппарат теории случайных процессов для решения задач профессиональной деятельности, как теоретических, так и практических. -

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Седьмой семестр, зачет

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебра, теория вероятностей, математическая статистика.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 з.е., 72 часов, из которых:

-лекции: 16 ч.

-практические занятия: 16 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

Тема 1. Случайные функции и их основные характеристики.

Понятие случайной функции, случайного процесса. Траектории случайного процесса. Конечномерные распределения случайных процессов. Теорема Колмогорова. Математическое ожидание, ковариационная функция случайного процесса и его корреляционный момент. Стационарность в узком и широком смысле.

Тема 2. Процессы с независимыми приращениями.

Приращения случайного процесса и их независимость. Пуассоновский процесс, его распределение и характеристики. Модели Крамера – Лундберга и Спарре-Андерсена.

Тема 3. Цепи Маркова с дискретным временем.

Понятие цепи Маркова и способы ее описания. Характеристики состояний Цепи Маркова. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Предельное распределение вероятностей. Эргодическая теорема.

Тема 4. Цепи Маркова с непрерывным временем.

Определение цепи Маркова с непрерывным временем. Система дифференциальных уравнений Колмогорова для нахождения вероятностей состояний в произвольный момент времени. Стационарный режим цепи Маркова. Процессы гибели и размножения и их использование в теории массового обслуживания.

Тема 5. Гауссовские случайные процессы.

Понятие гауссовского процесса. Два определения Винеровского процесса и их эквивалентность. Свойства траекторий винеровского процесса (непрерывность, недифференцируемость, закон повторного логарифма). Марковское свойство винеровского процесса.

Тема 6. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы.

Фильтрованное вероятностное пространство и стохастический базис. Определения мартингала, субмартингала, супермартингала и их связь. Теорема Дуба. Квадратическая характеристика мартингала.

Тема 7. Стохастический интеграл и стохастический дифференциал.

Различные подходы к интегрированию случайных процессов. Интеграл Ито, интеграл Стратоновича, определения и свойства. Понятие стохастического дифференциала. Формула Ито замены переменного в стохастическом интеграле. Интегрирование «по частям» в интегралах от детерминированных функций.

Тема 8. Стохастические дифференциальные уравнения.

Понятие стохастического дифференциального уравнения (СДУ). Сильное и слабое решения СДУ. Уравнение Ланжевена. Процесс Орнштейна-Уленбека. Геометрическое броуновское движение и его использование в экономическом моделировании.  $(B,S)$  – рынок. Броуновский мост. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения.

## **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, выполнения индивидуальных заданий, теста по лекционному материалу и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

## 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет в седьмом семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит один теоретический вопрос и одну задачу. При сдаче всех индивидуальных заданий в течение семестра студент отвечает только один теоретический вопрос. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Понятие случайной функции, случайного процесса. Конечномерные распределения случайного процесса. Характеристики случайного процесса.
2. Стационарные случайные процессы (в узком и широком смысле). Привести примеры.
3. Процесс Пуассона, его распределение и характеристики. Модель Крамера-Лундберга.
4. Цепи Маркова с дискретным временем: определение и примеры. Уравнения Колмогорова-Чепмена.
5. Эргодическая теорема: сформулировать, изложить идею доказательства, привести примеры.
6. Цепи Маркова с непрерывным временем. Система дифференциальных уравнений Колмогорова. Стационарный режим.
7. Процессы гибели и размножения.
8. Винеровский процесс. Теорема об эквивалентности определений винеровского процесса.
9. Свойства траекторий винеровского процесса.
10. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Определения и примеры.
11. Предсказуемые последовательности. Разложение Дуба-Мейера: теорема Дуба.
12. Квадратическая характеристика мартингала.
13. Стохастический интеграл. Различные подходы к его определению.
14. Лемма о мере промежутка.
15. Интеграл Ито. Интеграл Стратоновича.
16. Стохастический дифференциал и его свойства. Примеры процессов, допускающих стохастический дифференциал.
17. Формула Ито. Примеры ее применения.
18. Уравнение Ланжевена.
19. Геометрическое броуновское движение и уравнение к нему приводящее.
20. Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ). Понятия сильного и слабого решения СДУ.

Примеры задач:

1. Найти математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию случайного процесса  $X_t = k\xi + t$ , где  $\xi$  - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами  $(a, \sigma^2)$ ,  $k \in R$ . Построить семейство траекторий случайной функции.
2. Является ли процесс  $X_t = e^{-bt}W(ae^{2bt})$ ;  $a, b \in R$ , винеровским? гауссовским? Найти его ковариационную функцию.

3. а) Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ ;  $P(\xi_n = 1) = 1 - P(\xi_n = -1) = p, p \neq \frac{1}{2}$ . Пусть

$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ ;  $F_n = \sigma(S_1, S_2, \dots, S_n)$  и  $X_n = S_n - p(n-1)$ . Является ли процесс  $X_n$  мартингалом, субмартингалом, супермартингалом относительно фильтрации  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?

б) Является ли процесс  $X(t) = N(t) - \lambda t$ , где  $N(t)$  - пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda > 0$  мартингалом относительно естественной фильтрации?

4. Пусть в некотором городе ежегодно 5% жителей переселяются в пригороды, а 3% жителей пригорода переселяется в город. Найти окончательное распределение жителей между пригородом и городом, если можно считать, что общее число жителей в городе и пригороде не меняется.

5. Система S представляет собой техническое устройство (ТУ), которое может находиться в одном из двух состояний:

$s_1$  - ТУ исправно (работает);

$s_2$  - ТУ неисправно (находится в ремонте).

На ТУ, находящееся в состоянии  $s_1$  действует поток отказов с интенсивностью  $\lambda = 0,7$ , переводящий ТУ в состояние  $s_2$ . На ТУ, находящееся в состоянии  $s_2$ , действует поток восстановлений с интенсивностью  $\mu = 0,5$ ; оба потока - пуассоновские, независимые. Найти вероятность состояний системы, считая, что в начальный момент при  $t=0$  ТУ исправно. Найти стационарный режим системы.

6. Используя формулу Ито, доказать равенство

$$\int_0^t w_s dw_s = \frac{1}{2}(w_t^2 - t), \quad t > 0.$$

7. Доказать, что процесс  $X_t = \xi e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma w_t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $r \in \check{Y}$  и  $\sigma > 0$ , есть единственное решение стохастического дифференциального уравнения:

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dw_t, \quad X_0 = \xi.$$

8. Предположим, что процесс  $(X_t, t \geq 0)$  является решением уравнения

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dw_t, \quad X_0 = \xi,$$

причем  $E\xi^4 < \infty$ ,  $r \in \check{Y}$  и  $\sigma > 0$ . Вычислить  $\gamma(t) = EX_t^2$ .

9. С помощью формулы Ито докажите, что для детерминированной функции  $f = f(t)$  из  $C^1$  справедлива формула "интегрирования по частям":

$$\int_0^t f(s)dw_s = f(t)w_t - \int_0^t f'(s)w_s ds.$$

Результаты зачета : Оценка «зачтено» выставляется, если дан правильный и развернутый ответ на теоретический вопрос, а так же верно решена задача. Оценка «незачтено» выставляется, если ответ на теоретический вопрос представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения, допущены существенные терминологические и фактические ошибки либо если неверно решена (не решена) задача.

Студенты, сдавшие все индивидуальные задания по практике, отвечают только на теоретический вопрос.

### 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=12913>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) темы практических занятий по дисциплине совпадают с темами соответствующих лекций.

### 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Бородин А.Н. Случайные процессы, СПб, Лань, 2013. - 640 с. ЭБС "Лань":

<http://e.lanbook.com/view/book/12935/>

2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М., Физматлит, 2005. 400

с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/59319/>

3. Емельянова Т.В., Кривякова Э.Н. Случайные процессы. Методические указания. Томск, ТГУ, 2007.

4. Коршунов Д.А., Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей, СПб, Лань, 2004.

5. Коралов Л.Б., Синай Я.Г. Теория вероятностей и случайные процессы. - М.: МЦНМО, 2013. - 408 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/56404/>

6. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах.- М.: Физматлит, 2007. - 320 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/48168/>.

7. Ширяев А.Н. Вероятность – 2. Суммы и последовательности случайных величин — стационарные, мартингалы, марковские цепи. М.: Изд-во МЦНМО, 2011, 553-967 с.

8. Прохоров А. В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: КДУ, 2009, 326 с.

9. Хрущева И.В., Щербаков В.И., Леванова Д.С. Основы математической статистики и теории случайных процессов. - СПб.: "Лань", 2009. - 336 с. ЭБС "Лань":

<http://e.lanbook.com/view/book/426/>

б) дополнительная литература:

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М., Наука, 1972.
2. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. Том 1. НТИ «Горячая линия — Телеком», 2014.

в) ресурсы сети Интернет:

- <http://digest.ws/matlab.html>

– Общероссийская Сеть КонсультантПлюс Справочная правовая система.

<http://www.consultant.ru>

### **13. Перечень информационных технологий**

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

– ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>

– ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

### **15. Информация о разработчиках**

Емельянова Татьяна Вениаминовна, к. ф-м. н., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ.