

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Математическая статистика

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
и компьютерных наук**

**Основы научно-исследовательской деятельности в области механики
и математического моделирования**

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- коллоквиум.

Контрольная работа (ИОПК-1.2, 1.3)

Контрольная работа состоит из 3 задач.

Примеры задач:

1. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка из генеральной совокупности независимых и одинаково $R(0, \theta)$, распределенных случайных величин. Для оценки $T = \frac{n+1}{n} x_{(n)}$, $x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$, параметра θ найти математическое ожидание ET и дисперсию DT .

2. Пусть X_1, \dots, X_n - независимы и имеют нормальное распределение $N(\theta, 1)$. Построить доверительный интервал для θ с коэффициентом доверия α , основанный на центральной статистике $\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \theta)$.

3. По выборке $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения $N(\theta, \sigma^2)$ построить двусторонний γ - доверительный интервал для $\tau = -\theta$.

4. Пусть X_1, \dots, X_n - независимы и имеют распределение Пуассона $P(\theta)$. Построить равномерно наиболее мощный критерий размера α для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$. Найти функцию мощности.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если 2 задачи решены без ошибок.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если 1 задача решена без ошибок. Иначе выставляется оценка «неудовлетворительно».

Коллоквиум (ИОПК 1.1, 1.3)

Билет на коллоквиум состоит из 1 теоретического вопроса.

Перечень теоретических вопросов:

1. Проблема статистического вывода. Задачи математической статистики. Схема статистического вывода.
2. Выборка. Статистическая структура. Статистика. Статистическое правило. Функции потерь и риска. Плотность распределения выборки.
3. Выборочные характеристики: порядковые статистики, эмпирическая функция распределения, выборочные моменты и квантили, гистограммная оценка плотности распределения.
4. Достаточные статистики. Теорема факторизации с доказательством.
5. Примеры построения достаточных статистик для статистических структур Бернулли, равномерной, нормальной и Коши.
6. Примеры построения достаточных статистик для статистических структур Пуассона, показательной, гамма и биномиальной.
7. Оценка неизвестного параметра распределения: определение, свойства. Формулировка основной задачи статистической теории оценивания. Метод моментов.
8. Примеры построения оценок по методу моментов.
9. Теорема о состоятельности оценок по методу моментов с доказательством.
10. Теорема об асимптотической нормальности оценок по методу моментов с доказательством.
11. Принцип и метод максимального правдоподобия для оценивания неизвестных параметров распределений. Функция правдоподобия. Уравнения правдоподобия. Примеры построения оценок ММП.
12. Теорема о состоятельности оценок ММП с доказательством.
13. Информация по Фишеру: определение и свойства.
14. Теорема об асимптотической нормальности оценок ММП с доказательством.
15. Оптимальная оценка. Неравенство Рао-Крамера с доказательством.
16. Неравенство Рао-Крамера для несмещенных оценок. Метод построения оптимальных несмещенных оценок.
17. Эффективность несмещенной оценки. Теорема об эффективности оценки ММП с доказательством. Примеры эффективных несмещенных оценок неизвестных параметров распределений.

Критерии оценивания коллоквиума и зачета

Не зачтено	Зачтено
Дан неправильный ответ, однозначно неправильная трактовка темы.	Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Знание основной и дополнительной литературы.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в шестом семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос (ИОПК 1.3) и задачу (ИОПК 1.2, ИОПК 1.1).

Перечень теоретических вопросов:

1. Доверительные области (интервалы). Построение доверительных интервалов для среднего и доверительных верхних границ для дисперсии нормального распределения.
2. Лемма Фишера с доказательством.
3. Асимптотически доверительные области. Построение асимптотически доверительных интервалов для вероятности успеха в схеме Бернулли и параметра интенсивности распределения Пуассона.
4. Статистическая проверка гипотез: основные понятия и определения.
5. Критерии на основе состоятельных оценок параметров распределений. Проверка гипотезы о величине среднего значения нормального распределения при известной и неизвестной дисперсии.
6. Критерии на основе состоятельных оценок параметров распределений. Проверка гипотезы о величине дисперсии нормального распределения при известном и неизвестном среднем значении.
7. Двухвыборочные критерии Стьюдента (сравнение средних) и Фишера (сравнение дисперсий).
8. Подходы к сравнению критериев. Наиболее мощные критерии.
9. Критерий отношения правдоподобия. Лемма Неймана-Пирсона с доказательством.
10. Рандомизированные критерии. Проверка гипотезы о вероятности успеха в схеме Бернулли.
11. Проверка надежности при показательном распределении долговечности.
12. Принцип двойственности между задачами проверки гипотез и доверительного оценивания. Оптимальность доверительных границ, соответствующих равномерно наиболее мощным критериям.
13. Критерии согласия хи-квадрат и Колмогорова.
14. Теорема Пирсона с доказательством.
15. Критерий проверки независимости хи-квадрат.
16. Критерий проверки однородности хи-квадрат.
17. Критерий Смирнова. Критерий Манна-Уитни.

Примеры задач:

1. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных студентов.

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	179-182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Считая, что измерения нормально распределены с параметрами (a, σ^2) . Найти наиболее правдоподобную оценку вектора (a, σ^2) , оценить эффективность полученной оценки. Каково будет решение этой задачи, когда

а) σ^2 - известно, a - неизвестно;

б) σ^2 - неизвестно, a - известно.

2. Согласуются ли приведенные выше данные с нормальным распределением?

Зачет может быть оценен «Зачтено» и «Не зачтено». Итоговая оценка – «Зачтено» выставляется, если зачтены индивидуальные задания, коллоквиум и зачет, иначе выставляется - «Не зачтено». При ответе на теоретический вопрос оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал, знания основной и дополнительной литературы.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи (ИОПК 1.1-1.3)

1. Пусть X_1, \dots, X_n независимы и имеют нормальное распределение $N(\theta, 1)$.

Исследовать несмещенность и состоятельность оценки $T(X) = \bar{X}$ параметра θ .

2. Дана среднегодовая температура в городе за два десятилетия.

1-ое десятилетие	7,5	10,6	9,7	6,8	6,9	10,5	9,5	8,9	11,2	8,1
2-ое десятилетие	10,1	8,4	5,6	11,7	9,8	7,8	8,8	11,1	9,7	7,8

Определить, является ли расхождение между среднегодовыми температурами существенным, т.е. меняется ли климат данного города?

Ответы:

Задача 1. Несмещенная и состоятельная

Задача 2. Нет, не значимо

Информация о разработчиках

Пчелинцев Евгений Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ