Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Дифференциальные уравнения

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математические методы в цифровой экономике

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольные работы;

− тесты.

За контрольную работу ставится «зачёт», если решены все задания предложенного варианта.

3 семестр

Контрольные работы состоят из пяти заданий

Комплекты типовых контрольных заданий имеют следующий вид.

Контрольная работа № 1 (ИОПК-1.1., ИОПК-1.2., ИОПК-1.3., ИОПК-1.4.)

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

Вариант 1

Решить уравнения:

1. $\dfrac{y-xy'}{x+yy'}=2.$
2. $\left(e^{y}+2xy\right)dx+\left(e^{y}+x\right)xdy=0.$
3. $xdy-ydx=x\sqrt{x^{2}+y^{2}}\,dx.$
4. $y'=3x+\sqrt{y-x^{2}}.$
5. $x^{2}y'=x^{2}y^{2}+xy+1.$

Вариант 2

Решить уравнения:
1. $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0.$
2. $[2x-\ln(y+1)]dx-\dfrac{x+y}{y+1}dy=0.$
3. $(3xy+x+y)ydx+(4xy+x+2y)xdy=0.$
4. $xy'+1=e^{x-y}.$
5. $y'=-y^{2}+1+x^{2}.$

Ответы.

Вариант 1

1. $\ln\left(x^{2}+y^{2}\right)+arctg\dfrac{y}{x}=C.$

2. $e^{y}x+x^{2}y=C.$

3. $\ln\left|\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^{2}}\right|=x+C,\ x=0.$

4. $\left(2\sqrt{y-x^{2}}+x\right)\left(y-2x\sqrt{y-x^{2}}\right)=C.$

5. $y=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x[C-\ln|x|]},\ y=-\dfrac{1}{x}.$

Вариант 2

1. $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C,\ 2x+3y=7.$

2. $x^{2}-(x-1)\ln(y+1)-y=C.$

3. $6x^{3}y^{4}+2x^{3}y^{3}+3x^{2}y^{4}=C.$

4. $xe^{y}=e^{x}+C.$

5. $y=x+\left(e^{x^{2}}\left(C+\int e^{-x^{2}}dx\right)\right)^{-1},\ y=x.$

Контрольная работа № 2 (ИОПК-1.1., ИОПК-1.2., ИОПК-1.3., ИОПК-1.4.)

Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной. Дифференциальные уравнения порядка выше первого

Вариант 1

Решить уравнения:
1. $x\left(y'^{2}+e^{2y}\right)=-2y'.$
2. $3y'^{3}-xy'+1=0.$
3. $xyy''+yy'+x^{2}y'^{3}=0.$
4. $y''+y=\dfrac{1}{\sin^{3}x}$ – методом вариации постоянных.
5. $y''-6y'+8y=e^{x}+e^{2x}$ – методом неопределённых коэффициентов.

Вариант 2

Решить уравнения:

1. $(yy')^3 = 27x(y^2 - 2x^2)$.

2. $(xy' - y)^3 = y'^3 - 1$.

3. $\left(\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2}\right)^2 - x\left(\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2}\right) + \frac{y'}{y} = 0$.

4. $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$ – методом вариации постоянных.

5. $y'' - 4y' + 4y = x^2$ – методом неопределённых коэффициентов.

Ответы.

Вариант 1

1. $(1 + C^2x^2)e^y = 2C,\ x^2e^{2y} = 1$.

2. $x = 3p^2 + \frac{1}{p},\ y = 2p^3 - \ln|p| + C$.

3. $y = C,\ y\ln|y| + yC_1 = \ln|x| + C_2$.

4. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2\sin x}$.

5. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{x}{2}e^{2x}$.

Вариант 2

1. $y^2 = 3x^2, (u-1)\ln Cx^6(u-1)^5(u+2)^4 = 3, u = \sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2}$.

2. $y = Cx - (C^3 - 1)^{1/3}, x = \frac{p^2}{(p^3-1)^{2/3}}, y = xp - (p^3 - 1)^{1/3}$.

3. $y = C_2e^{\frac{C_1}{2}x^2 - C_1^2x},\ y = Ce^{\frac{x^3}{12}}$.

4. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + e^x(x-1) + xe^{-x}\ln|x|$.

5. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$.

Тест (ИОПК-1.1., ИОПК-1.2., ИОПК-1.3., ИОПК-1.4.)

1. Какие из перечисленных уравнений относятся к уравнениям, не разрешённым относительно производной:

а) $y'(x^2 - y) = xy$.

б) $y'^3 = 4y(xy' - 2y)$.

в) $y' - \frac{2}{x}y = e^x\left(1 - \frac{2}{x}\right)$.

г) $(y - 2x)^2(y'^2 + 1) = (2y' + 1)^2$.

д) $yy' - xe^{2x} = y^2$.

е) $y^3y'' = 1$.

2. Для каких из приведённых уравнений частное решение неоднородного строится по виду правой части.

а) $y^{IV} + y''' - y'' - y' = 2x + 2\sin x$.

б) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 8\cos 2x$.

в) $y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

г) $y''' + y'' + 16y' + 16y = \left(34x - 4\right)e^{-x} + 30\sin x$.

д) $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

е) $y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3}e^x$.

ж) $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Ключи: 1б), 1г); 2а), 2б), 2г).

Тест считается пройденным, если обучающийся ответил правильно как минимум на половину вопросов.

4 семестр

Контрольные работы состоят из пяти заданий
Комплекты типовых контрольных заданий имеют следующий вид.

Контрольная работа № 1 (ИОПК-1.3., ИОПК-1.4., ИОПК-3.1., ИОПК-3.2., ИОПК-3.3., ИОПК-3.4..)

Краевая задача. Функция Грина. Системы дифференциальных уравнений

Вариант 1

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = 7e^{y} - 27, \\ \dfrac{dy}{dt} - 2x + 3y = -3e^{t} + 12. \end{cases}$ – методом Эйлера и МНК

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t} + e^{-t}. \end{cases}$ – методом исключения и методом вариации постоянных

3. $\dot{X} = A_1 X$, $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ – матричным методом

Решить краевую задачу

4. $y'' + y' = 1;\ \ y'(0) = 0,\ \ y(1) = 1.$

Построить функцию Грина для краевой задачи

5. $x^2 y'' + 5xy' + 3y = f(x),\ \ y'(1) = 0,\ \ y(x) = O\left(x^{-2}\right)$ при $x \to +\infty$.

Вариант 2

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2x + y = 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} - 3x + 2y = 4te^{2t}. \end{cases}$ – методом Эйлера и МНК

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$ – методом исключения и методом вариации постоянных

3. $\dot{X} = A_1 X$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – матричным методом

Решить краевую задачу

4. $x^2 y'' - 6y = 0;$ $y(0)$ ограничено, $y(1) = 2.$

Построить функцию Грина для краевой задачи

5. $x^2 y'' + xy' - y = f(x),$ $y(1) = 0,$ $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty.$

Ответы.

Вариант 2

1. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + \dfrac{4}{9} e^{2t}(4 - 3t) + 3te^t,$
$y = 3C_1 + C_2 e^t + \dfrac{3}{2}(2t - 1) + \dfrac{4}{3} e^{2t}.$

2. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\cos t,$
$y = -(C_1 - C_2)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t + t\cos t + t\sin t.$

3. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$
$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$

4. $y = 2x^3.$

5. $G(x,s) = \dfrac{(1 - x^2)}{2s^2 x}$, $1 \le x \le s;$ $G(x,s) = \dfrac{(1 - s^2)}{2s^2 x}$, $s \le x < \infty.$

Контрольная работа № 2 (ИОПК-1.1., ИОПК-1.2., ИОПК-1.3., ИОПК-3.3., ИОПК-3.4.)

Уравнения в частных производных первого порядка. Устойчивость. Вариационное исчисление

Вариант 1

1. Решить уравнение $\dfrac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, удовлетворяющее условиям $z = y,$ $x = 0.$

2. При каких значениях a и b асимптотически устойчиво решение $x = 0$, $y = 0$ системы $\dot{x} = (a^2 - b)x + (b + 1)y,$ $\dot{y} = -b^2 x + b^2 y.$

3. Исследовать на устойчивость по первому приближению решение $x = 0$, $y = 0$ системы $\dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2,$ $\dot{y} = -2x + \sin y + e^x x^2.$

4. Найти кратчайшее расстояние между окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и прямой $x + y = 4.$

5. Найти экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 (360x^2 y - y''^2)dx, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2{,}5.$$

Вариант 2

1. Решить уравнение $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial z}=0,$ удовлетворяющее условиям $u=yz,\ \ x=1.$

2. При каких значениях a и b асимптотически устойчиво решение $x=0$, $y=0$ системы $\dot{x}=ax+by,\ \ \dot{y}=-bx+(a-2)y.$

3. Исследовать на устойчивость по первому приближению решение $x=0$, $y=0$ системы $\dot{x}=-\sin x+3y+x^5,\ \ \dot{y}=\frac{1}{4}x-2y-\frac{1}{6}y^3.$

4. Найти кратчайшее расстояние между окружностью $x^2+y^2=1$ и гиперболой $y=\frac{5}{x}.$

5. Найти экстремали функционала

$$J[y(x),z(x)]=\int_0^{\pi}\left(2yz-2y^2+y'^2-z'^2\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(\pi)=1,\ \ z(0)=0,\ \ z(\pi)=1.$$

Ответы.
Вариант 1
1. $z=ye^x-e^{2x}+1.$
2. $a^2+b^2-b<0,\ a\neq 0.$
3. $x=0, y=0$ − асимптотически устойчивое решение.
4. $2\sqrt{2}-1.$
5. $y=\frac{1}{2}x^6+\frac{3}{2}x^3-3x^2+x.$

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

В 3-ом и 4-ом семестрах предусмотрена промежуточная аттестация в форме зачёта и экзамена.

Критерии формирования оценок при проведении зачёта

«Зачёт» ставится в том случае, если обучающийся ответил не менее, чем на два вопроса из предложенного ниже списка вопросов по четырём разделам.

Критерии формирования оценок при проведении экзамена

Оценки при проведении экзамена формируются в соответствии с нижеприведенной таблицей.

неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично
Не ответил ни на один из двух вопросов билета и не решил задачу. Ответил на один из двух вопросов билета и не решил задачу.	Ответил на один из двух вопросов билета и решил задачу.	Ответил на оба вопроса и не полностью решил задачу.	Ответил на оба вопроса и полностью решил задачу.

Контрольные вопросы для проведения промежуточной аттестации в форме зачёта

3 семестр

Раздел «УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ И НЕ РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ»

1. Изоклины.
2. Определение обыкновенного дифференциального уравнения. Порядок уравнения. Понятие первого и общего интеграла дифференциального уравнения.
3. Построение дифференциального уравнения для геометрической и физической задачи.
4. Определение уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными. Типы уравнений, приводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными.
5. Определение однородного уравнения. Понятие однородной функции.
6. Линейные уравнения первого порядка. Определение уравнения Бернулли и уравнения Риккати.
7. Определение уравнения в полных дифференциалах. Определение интегрирующего множителя. Уравнения в полных дифференциалах и с интегрирующим множителем.
8. Определение уравнения, не разрешённого относительно производной.
9. Особые точки и особые решения. Понятие дискриминантной кривой.
10. Графическое построение особых кривых уравнения, разрешённого относительно производной.
11. Метод введения параметра при интегрировании уравнения, разрешённого относительно производной.

Раздел «УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ»

1. Определение уравнения порядка выше первого.
2. Уравнение, не содержащее искомую функцию. Замена переменных и сведение исходного уравнения к уравнению с новой неизвестной функцией.
3. Уравнение, не содержащее независимого переменного (в явном виде). Замена переменных и интегрирование уравнения с новым независимым переменным и новой неизвестной функцией.
4. Интегрирование исходного уравнения путём выделения в нём полной производной от некоторого дифференциального выражения.
5. Определение однородного относительно неизвестной функции и всех её производных уравнения. Замена переменных, позволяющая понизить порядок уравнения на единицу.
6. Определение обобщённого однородного уравнения. Соответствующая замена переменных, понижающая порядок уравнения на единицу.
7. Решение указанного типа уравнений с заданными начальными условиями.

Раздел «УРАВНЕНИЯ N-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ»

1. Определение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.
2. Однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Определение характеристического уравнения. Различные случаи корней характеристического уравнения. Запись общего решения уравнения для этих случаев.
3. Метод неопределённых коэффициентов при построении частного решения неоднородного уравнения. Правило построения частного решения.
4. Метод вариации произвольных постоянных при интегрировании неоднородного уравнения.

5. Однородное уравнение Эйлера. Сведение его к уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного.

6. Неоднородное уравнение Эйлера.

7. Интегрирование уравнение с комплексными коэффициентами.

4 семестр

Раздел «КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

1. Решение краевых задач.

2. Решение краевых задач методом функции Грина.

2. Представление решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда.

3. Нахождение приближённого решения дифференциального уравнения в виде ряда по степеням малого параметра.

Раздел «СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ»

1. Определение системы дифференциальных уравнений.

2. Нахождение интегрируемых комбинаций.

3. Метод Эйлера. Запись общего решения однородной системы для различных случаев корней характеристического уравнения.

4. Метод исключения для интегрирования однородной и неоднородной системы.

5. Метод Д'аламбера.

6. Матричный метод для интегрирования однородной системы. Определение жордановой клетки матрицы. Приведение матрицы системы к каноническому виду.

7. Метод неопределённых коэффициентов при построении вектора частных решений неоднородной системы.

8. Метод вариации произвольных постоянных.

Раздел «УСТОЙЧИВОСТЬ»

1. Определение устойчивости решения уравнения (системы уравнений) по Ляпунову. Определение точки покоя системы. Определение асимптотической устойчивости.

2. Построение функции Ляпунова при исследовании на устойчивость тривиального решения системы с применением теоремы Ляпунова об устойчивости, теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и теоремы Четаева о неустойчивости.

3. Типы особых точек.

4. Исследование на устойчивость тривиального решения системы по первому приближению.

5. Исследование на устойчивость тривиального решения системы с коэффици-ентами, заданными в параметрической форме.

6. Исследование на устойчивость тривиального решения системы с использованием теоремы Гурвица.

Раздел «УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА»

1. Определение линейного однородного и квазилинейного уравнения от функции n переменных. Первый интеграл. Характеристики.

2. Свойство равных дробей.

3. Интегрирование уравнения в частных производных путём сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

4. Нахождение поверхности, удовлетворяющей заданному уравнению и проходя-щей через данную линию.

Раздел «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

1. Определение функционала. Определение вариации функционала.
2. Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами. Уравнение Эйлера.
3. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
4. Система уравнений Эйлера для функционалов, зависящих от нескольких функций.
5. Уравнение Эйлера-Пуассона для функционалов, зависящих от производных высших порядков.
6. Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами.
7. Условия трансверсальности в общем случае в задаче со скользящими концами.

В 3-ем и 4-ом семестрах предусмотрена промежуточная аттестация в форме экзамена, который проводится следующим образом. Обучающемуся предлагается взять экзаменационный билет, содержащий два теоретических вопроса из перечня вопросов, приведённых ниже, и одну задачу (уравнение, система уравнений, функционал, текстовая задача для решения методами вариационного исчисления).

Контрольные вопросы для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена

3 семестр

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Решение общее, частное. Первый и общий интеграл дифференциального уравнения.
3. Задача Коши и граничная задача.
4. Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной.
5. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. Уравнения в полных дифференциалах.
6. Принцип сжатых отображений.
7. Теорема существования и единственности решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
8. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Теорема существования и решения уравнения $F(x, y, y') = 0$.
9. Особые точки, особые решения.
10. Дифференциальные уравнения порядка выше первого. Теорема существования и единственности решения для дифференциального уравнения вида $y^{(n)} = f\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}\right)$.
11. Сведение уравнений n-го порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений.
12. Формула Остроградского-Лиувилля.
13. Простейшие случаи понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.
14. Теоремы о решениях линейного уравнения n-го порядка.

15. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные).

16. Уравнения Эйлера.

17. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов.

18. Метод малого параметра.

19. Понятие о краевых задачах.

20. Решение краевой задачи методом функции Грина.

21. Построение функции Грина.

4 семестр

1. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путём сведения к одному уравнению более высокого порядка.

2. Нахождение интегрируемых комбинаций. Системы линейных дифференциальных уравнений. Теоремы о решениях системы линейных дифференциальных уравнений.

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

4. Теория устойчивости. Основные понятия. Простейшие типы точек покоя. Второй метод А. М. Ляпунова.

5. Исследование на устойчивость по первому приближению. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена.

6. Случай малого коэффициента при производной высшего порядка.

7. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теорема Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

8. Уравнения в частных производных первого порядка. Основные понятия.

9. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

Связь с векторным полем. Характеристики. Теорема об общем решении уравнения в частных производных первого порядка.

10. Вариация и ее свойства. Основная лемма вариационного исчисления. Основная теорема вариационного исчисления.

11. Вариационная задача с неподвижными границами. Уравнение Эйлера.

12. Функционалы вида $\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right)dx$. Система уравнений Эйлера.

13. Функционалы вида $\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)dx$. Уравнение Эйлера–Пуассона.

14. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Уравнение Остроградского.

16. Метод вариаций в задачах с подвижными границами. Простейшая задача с подвижными границами.

17. Условия трансверсальности.

18. Задача с подвижными границами для функционалов вида $\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, z, y', z'\right)dx$.

Задачи, выносимые на экзамен

3 семестр

Решить уравнения:

1. $2xy' + y^2 = 1.$
2. $(x+y)^2 y' = 1.$
3. $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}.$
4. $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + tg\,\dfrac{y-2x}{x+1}.$
5. $\dfrac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$
6. $y' = tg(y-2x).$
7. $y' = \dfrac{y^2 - x}{2y(x+1)}.$
8. $6x^5 y dx + (y^4 \ln y - 3x^6)dy = 0.$
9. $(x^3 - 2xy^2)dx + 3x^2 y dy = xdy - ydx.$
10. $y' = y^2 - xy - x.$
11. $y''' + y' = \sin x + x\cos x.$
12. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}.$
13. $4y = x^2 + y'^2.$
14. $y'^4 = 4y(xy' - 2y)^2.$
15. $(xy' - y)^2 = x^2 y^2 - x^4.$
16. $(xy' - y)^2 = y'^2 - \dfrac{2yy'}{x} + 1.$
17. $y = 2xy' - 4y'^3.$
18. $2xy'y'' = y'^2 - 1.$
19. $yy'' + 1 = y'^2.$
20. $y'' = xy' + y + 1.$
21. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}.$
22. $x^3 y'' = (y - xy')(y - xy' - x).$
23. $x^2 y'' - 2y = \sin\ln x.$
24. $xy'' + 2y' - xy = 0;\ \ y_1 = \dfrac{e^x}{x}.$
25. $y'' - y' tgx + 2y = 0;\ \ y_1 = \sin x.$

Найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным краевым условиям.

1. $y'' + y = 2x - \pi;\ \ y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0.$
2. $y'' - 2iy = 0;\ \ y(0) = -1,\ \ y(+\infty) = 0.$
3. $x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0;\ \ y'(1) = 3,\ \ y(x) = O(x^{-2})$ при $x \to +\infty.$

Для каждой из краевых задач построить функцию Грина.

1. $x^2 y'' + 2xy' = f(x);\ \ y(1) = 0,\ \ y'(3) = 0.$
2. $y'' - y = f(x);\ \ y'(0) = 0,\ \ y'(2) + y(2) = 0.$
3. $x^2 y'' + 2xy' - 2y = f(x);\ \ y(0)$ ограничено, $y(1) = 0.$

4 семестр

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$ – методом Эйлера
2. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ – методом исключения
3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$ – методом Д'аламбера

4. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. – матричным методом

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$ – методом неопределённых коэффициентов

6. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$ – методом вариации постоянных

7. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчиво ли решение уравнения $\dot{x} = t - x$ с начальным условием $x(0) = 1$.

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение в следующих системах:

8. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^{y}. \end{cases}$

10 . $\begin{cases} \dot{x} = tg(y - x), \\ \dot{y} = 2^{y} - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$

Исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение в следующих системах:

11. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$

Пользуясь теоремой Гурвица об отрицательности действительных частей всех корней многочлена, исследовать устойчивость нулевого решения в следующих задачах:

13. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$

14. $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$

15. $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$

Решить уравнения

16. $\left(x^2 + y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0.$

17. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (z + u)\dfrac{\partial u}{\partial z} = xy.$

18. $\left(y + 2z^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2x^2 z\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2;\ \ x = z,\ \ y = x^2.$

Найти экстремали функционалов:

19. $J[y(x)]=\int_0^1 \left(y^2+y'^2\right)dx;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1.$

20. $J[y(x)]=\dfrac{1}{2}\int_0^1 (y'')^2\,dx$ при условиях $y(0)=0,\ \ y(1)=\dfrac{1}{2},\ y'(0)=0,\ \ y'(1)=1.$

21. $J[y(x),z(x)]=\int_0^{\pi/2} \left(y'^2+z'^2-2yz\right)dx;\ \ y(0)=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ \ z(0)=0,\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

Типовые экзаменационные билеты имеют следующий вид.

Томский государственный университет
Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики

Дифференциальные уравнения

Экзаменационный билет № 1 (1-й семестр)

1. Принцип сжатых отображений.
2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней характеристического уравнения.
3. Решить уравнение $x^3y''=(y-xy')(y-xy'-x).$

Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор _____________ */Л.А. Нежельская /*

Томский государственный университет
Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики

Дифференциальные уравнения

Экзаменационный билет № 1 (2-й семестр)

1. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
2. Вариация и её свойства.
3. Решить систему методом вариации постоянных $\begin{cases}\dot{x}=x-y+\dfrac{1}{\cos t},\\ \dot{y}=2x-y.\end{cases}$

Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор _____________ */Л.А. Нежельская /*

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Билет № 1 (№ 5, № 9)

1. $y'' + y' = \sin x + x\cos x$.
2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Билет № 3 (№ 7, № 11)

1. $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$.
2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

Билет № 2 (№ 6, № 10)

1. $y'' - y = 2x$.
2. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Билет № 4 (№ 8, № 12)

1. $y'' - 3y' + 2y = 6xe^x$.
2. $y'' + 4y = 2tgx$.

2. Ответы к заданиям

№ билета	Ответ к заданию
1, 5, 9	1. $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x\sin x + \frac{1}{2}(1-x)\cos x$. 2. $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x \ln\lvert\sin x\rvert$.
2,6, 10	1. $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x$. 2. $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\lvert e^x + 1\rvert$.
3,7, 11	1. $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}xe^{2x}$. 2. $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2\sin x}$.
4, 8, 12	1. $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 3xe^x(x+2)$. 2. $y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \sin 2x \ln\lvert\cos x\rvert - x\cos 2x$.

Информация о разработчиках

Нежельская Людмила Алексеевна, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики НИ ТГУ.