

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Радиофизический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан

А. Г. Коротаев

Оценочные материалы по дисциплине

Линейная алгебра

по направлению подготовки

**03.03.03 Радиофизика**

Направленность (профиль) подготовки:

**Радиофизика, электроника и информационные системы**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**

Год приема

**2025**

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

М.Л. Громов

Председатель УМК

А.П. Коханенко

Томск – 2025

## **1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Обладает базовыми знаниями в области математики и физики, необходимыми для освоения специальных дисциплин.

ИОПК 1.2 Обладает базовыми знаниями в области радиофизики, необходимыми для профессиональной деятельности.

ИОПК 1.3 Применяет базовые знания в области физики и радиофизики при осуществлении профессиональной деятельности.

ИУК 1.1 Осуществляет поиск информации, необходимой для решения задачи.

ИУК 1.2 Проводит критический анализ различных источников информации (эмпирической, теоретической).

ИУК 1.3 Выявляет соотношение части и целого, их взаимосвязь, а также взаимоподчиненность элементов системы в ходе решения поставленной задачи.

ИУК 1.4 Синтезирует новое содержание и рефлексивно интерпретирует результаты анализа.

## **2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Элементы текущего контроля:

- тест к разделу «Матрицы и определители»;
- контрольная работа к разделу «Матрицы и определители»;
- тест к разделу «Системы линейных уравнений»;
- контрольная работа к разделу «Системы линейных уравнений»;
- тест к разделу «Линейные пространства»;
- контрольная работа к разделу «Линейные пространства»

Пример комплекта элементов текущего контроля к разделу «Матрицы и определители»

Тест (ИУК-1.1 – 1.4, ИОПК 1.1 – 1.3)

1. Матрица  $A_{3 \times 4}$  содержит ...

- а) 12 элементов
- б) 4 строки
- в) 4 столбца
- г) 3 строки
- д) 3 столбца

2. Какие из утверждений верны?

- а) единичная матрица является квадратной;
- б) все элементы единичной матрицы равны 1;
- в) единичная матрица содержит единицы на главной диагонали;
- г) единичная матрица содержит единицы на побочной диагонали;
- д) элементы, расположенные вне главной диагонали единичной матрицы, равны 0.

3. Даны следующие матрицы:  $A_{3 \times 4}$ ,  $B_{7 \times 7}$ ,  $C_{7 \times 5}$ ,  $D_{4 \times 3}$ . Какие из перечисленных произведений матриц можно вычислить?

- а)  $A \cdot B$ ;
- б)  $B \cdot C$ ;
- в)  $A \cdot D$ ;
- г)  $D \cdot A$ ;
- д)  $D \cdot B$ .

4. Чему равен определитель матрицы порядка  $n$ ?

- а) сумме произведений элементов любого столбца матрицы на дополнительные миноры этих элементов;
- б) сумме произведений элементов любого столбца матрицы на алгебраические дополнения этих элементов;
- в) произведению сумм элементов строк матрицы;
- г) сумме произведений элементов любой строки матрицы на алгебраические дополнения этих элементов.

5. Минор  $\bar{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$  матрицы  $A_n$  имеет порядок

- а)  $k$ ;
- б)  $n - k$ ;
- в)  $n$ ;
- г)  $k(n - k)$ ;
- д)  $n(n - k)$ .

6. Какие утверждения о диагональной матрице являются верными?

- а) в диагональной матрице все элементы на главной диагонали равны между собой;
- б)  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , где  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$
- в)  $a_{ij} = 0$  при  $i = j$ , где  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$
- г) в диагональной матрице все элементы вне главной диагонали равны нулю;
- д) диагональная матрица является квадратной.

7. Какие из приведенных матриц являются квадратными? Выберите один или несколько ответов:

- а)  $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 15 \\ 11 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ;
- б)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;
- в)  $\begin{bmatrix} 4 & 16 & 144 \\ 49 & 625 & 64 \end{bmatrix}$ ;
- г)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

8. Выберите матрицу размерности  $3 \times 1$ :

- а)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $[3]$ ; в)  $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

9. Алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A_n$  вычисляется по формуле:

- а)  $(-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_i^j$ ;
- б)  $(-1)^{i+j} \bar{M}_i^j$ ;
- в)  $(-1) \bar{M}_i^j$ ;
- г)  $\bar{M}_i^j - a_{ij}$ ;

10. Количество слагаемых при вычислении определителя матрицы  $A_n$  непосредственно через его элементы равно

- а)  $n$  б)  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  в)  $n!$  г)  $n^n$  д)  $n^2$

Ключ: 1 а),в),г); 2 а),в),д); 3 б),в),г); 4 б),г); 5 б); 6 б),г); 7 а),б); 8 а); 9 б); 10 в).

Критерии оценивания: тест считается пройденным, если обучающий ответил правильно как минимум на 60% вопросов.

Контрольная работа по разделу «Матрицы и определители» (ИОПК 1.1 – 1.3)

1. Вычислить  $(3A + (-2)B)^T \cdot C$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -8 \\ -5 & 4 & -5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка, используя свойства определителя

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 & -1 \\ -12 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & 11 & 1 \\ -12 & 6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

3. Найти матрицу, обратную данной методом алгебраических дополнений

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Вычислить ранг матрицы методом Гаусса, выписать любой базисный минор этой матрицы:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & -14 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & -15 \\ -2 & -2 & -4 & -1 & 14 \\ -4 & -2 & -9 & -2 & 29 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

5э Выписать миноры  $M_{1,4}^{2,5}$  и  $\bar{M}_{1,4}^{2,5}$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Каждая задача в контрольной работе оценивается по трёхбалльной шкале:

– 0 баллов – ход решения не правильный, задача решена неправильно,

– 1 балл – ход решения правильный, задача решена с незначительными арифметическими ошибками,

– 2 балла – задача решена полностью правильно.

Контрольная работа считается выполненной, если

– студент набрал 6 баллов – оценка «удовлетворительно»,

– студент набрал 7-8 баллов – оценка «хорошо»,

– студент набрал 9-10 баллов – оценка «отлично».

Если студент набрал менее 6 баллов – оценка «неудовлетворительно», контрольная работа считается не выполненной

### **3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания**

Экзаменационный билет состоит из трех теоретических вопросов, по одному из каждого раздела курса (ИУК-1.1 – 1.4, ИОПК 1.1 – 1.3).

Перечень теоретических вопросов:

Раздел I «Матрицы и определители»

1. Матрицы, основные понятия, равенство матриц, особые виды матриц
2. Транспонирование матрицы
3. Сложение матриц, определение, свойства
4. Умножение матрицы на число, определение, свойства
5. Умножение матриц, определение, свойства
6. Определитель  $n$ -го порядка, общая формула
7. Свойства определителей, формулировка, доказательство
8. Миноры, алгебраические дополнения и связь между ними
9. Разложение определителей по строке (столбцу) Формулы через алгебраические дополнения и миноры
10. Обратная матрица, определение, свойства
11. Теорема о единственности обратной матрицы
12. Теорема о существовании обратной матрицы
13. Обратная матрица, способ вычисления
14. Линейная зависимость вектор-строк матрицы
15. Ранг матрицы, определение, свойства
16. Определение базисного минора, теорема о базисном миноре
17. Способы вычисления ранга матрицы: по определению, метод окаймляющих миноров, метод эквивалентных преобразований

Раздел II «Системы линейных уравнений»

1. Системы линейных уравнений, основные определения и классификации
2. Теорема Кронекера-Капелли
3. Матричный метод решения систем линейных уравнений
4. Метод Крамера решения систем линейных уравнений
5. Теорема о числе решений совместной системы линейных уравнений
6. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений
7. Однородные системы линейных уравнений, критерий нетривиальной совместности однородной системы линейных уравнений
8. Приведенные системы линейных уравнений, связь решений неоднородной системы линейных уравнений и приведенной системы.
9. Фундаментальная совокупность решений однородной системы линейных уравнений
10. Общее решение неоднородной СЛУ с использованием ФСР приведенной системы

Раздел «Линейные пространства»

1. Определение линейного пространства, свойства нулевого и единичного элементов пространства
2. Базис и размерность линейного пространства
3. Преобразование координат при преобразовании базиса
4. Изоморфизм линейных пространств
5. Подпространства линейных пространств.

6. Сумма и пересечение подпространств.
7. Разложение подпространства в прямую сумму подпространств.
8. Евклидово пространство, определение.
9. Норма вектора, неравенство КБШ, теорема Пифагора
10. Ортонормированный базис в евклидовом пространстве, свойства
11. Процедура ортогонализации
12. Ортогональное дополнение подпространства, свойства
13. Проекция вектора на подпространство
14. Изоморфизм евклидовых пространств
15. Линейные операторы, линейное пространство операторов
16. Ранг и дефект линейного оператора
17. Невырожденный оператор, обратный оператор
18. Матрица линейного оператора
19. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора
20. Линейные, билинейные, квадратичные формы
21. Канонический вид квадратичной формы, приведение к каноническому виду.

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если студент

- дал правильные развернутые ответы на все вопросы билета, изложил их грамотным языком, уместно применил математическую символику;
- хорошо ориентируется в пределах изученных разделов дисциплины, знает определения и формулировки теорем, умеет доказывать теоремы, умеет решать типовые задачи
- показал умение доказывать теоретические положения, иллюстрировать их примерами, аргументировать ответы на сопутствующие вопросы, используя знания всего материала курса лекций и навыков решения задач.

Оценка «хорошо» выставляется, если студент

- дал правильные ответы на два из трех вопросов билета, в соответствии с критериями оценки «отлично»;
- продемонстрировал поверхностные знания оставшегося вопроса из билета;
- знает определения и формулировки теорем, умеет доказывать теоремы, умеет решать типовые задачи

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент

- дал правильный ответ на один вопрос билета, в соответствии с критериями оценки «отлично»;
- продемонстрировал поверхностные знания двух других вопросов;
- знает определения и формулировки теорем, умеет решать типовые задачи.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если студент продемонстрировал отсутствие знаний по вопросам билета, допустил ошибки в определении понятий, при использовании специальной терминологии и математической символики.

#### **4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)**

Тест (ИУК-1.1 – 1.4, ИОПК 1.1 – 1.3)

1. Какие из утверждений верны?

- а) единичная матрица является квадратной;
- б) все элементы единичной матрицы равны 1;
- в) единичная матрица содержит единицы на главной диагонали;

- г) единичная матрица содержит единицы на побочной диагонали;  
 д) элементы, находящиеся вне главной диагонали единичной матрицы, равны 0.
2. Даны следующие матрицы:  $A_{3 \times 4}$ ,  $B_{3 \times 7}$ ,  $C_{7 \times 5}$ ,  $D_{4 \times 3}$ . Какую из перечисленных матриц можно умножить на матрицу  $F_{7 \times 4}$  слева?
- а)  $A_{3 \times 4}$  ;  
 б)  $B_{3 \times 7}$  ;  
 в)  $C_{7 \times 5}$  ;  
 г)  $D_{4 \times 3}$ .
3. Выберите правильную формулу разложения определителя по  $j$ -му столбцу
- а)  $\det A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \bar{M}_i^k$ ;  
 б)  $\det A_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_i^j$ ;  
 в)  $\det A_{m \times n} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{im} \bar{M}_n^k$ ;  
 г)  $\det A_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \bar{M}_i^j$ .
4. Минор  $\bar{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$  матрицы  $A_n$  имеет порядок
- а)  $k$  ;  
 б)  $n - k$ ;  
 в)  $n$ ;  
 г)  $k(n - k)$ ;  
 д)  $n(n - k)$ .
5. Какие утверждения об обратной матрице являются верными?
- а) обратная матрица существует для всех квадратных матриц;  
 б)  $A^{-1} = A^T$   
 в) если обратная матрица существует, то она единственная;  
 г) произведение матрицы на ее обратную равно единичной матрице.
6. Дополнительный минор элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A_n$  вычисляется по формуле:
- а)  $(-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_i^j$  ;  
 б)  $(-1)^{i+j} \bar{M}_i^j$  ;  
 в)  $(-1) \bar{M}_i^j$  ;  
 г)  $\bar{M}_i^j - a_{ij}$ ;
7. Какая система линейных уравнений называется однородной?
- а) система, у которой все свободные члены одинаковые;  
 б) система, у которой число уравнений равно числу неизвестных;  
 в) система, у которой все коэффициенты при неизвестных равны нулю;  
 г) система, у которой все свободные члены равны нулю.
8. Укажите точную формулировку теоремы Кронекера-Капелли:
- а) чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы системы;  
 б) чтобы система была однородной, необходимо и достаточно, чтобы она была квадратной;  
 в) если система линейных уравнений совместна, то ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы;  
 г) система линейных уравнений совместна, если ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.
9. Какие из перечисленных условий должны выполняться, чтобы можно было применить формулы Крамера для нахождения неизвестных?
- а) система должна быть однородной;  
 б) система должна быть квадратной;  
 в) определитель основной матрицы системы должен быть отличен от нуля.

10. Система линейных уравнений с  $n$  неизвестными и рангом  $r$  имеет бесконечное число решений, если:
- а)  $n < r$ ; б)  $r < n$ ; в)  $n=8$ ; г)  $r = 1$ ; д)  $n = r$
11. Число фундаментальных решений однородной системы с  $n$  неизвестными и рангом основной матрицы  $r$  равно
- а)  $n - r$ ; б)  $r - n$ ; в)  $n$ ; г)  $r$ ; д)  $n + r$
12. К эквивалентным преобразованиям расширенной матрицы системы относятся
- а) прибавление к каждому элементу строки числа, отличного от нуля;  
 б) умножение каждого элемента строки на число, отличное от нуля;  
 в) перестановка последнего столбца расширенной матрицы системы на место третьего столбца;  
 г) прибавление к каждому элементу одной строки соответствующего элемента другой строки.
13. В каком случае линейное пространство называется  $n$ -мерным?
- а) если в нем существует  $n$  линейно независимых элементов, а любые  $(n+1)$  элементов линейно зависимы;  
 б) если в нем существует  $n$  линейно независимых элементов;  
 в) если в нем можно выбрать  $n$  различных базисов.
14. Выберите множество, являющееся линейным пространством:
- а) множество всех многочленов степени, точно равной натуральному числу  $n$ ?  
 б) множество всех решений неоднородной системы линейных уравнений;  
 в) множество действительных чисел;  
 г) множество положительных рациональных дробей.
15. Выберите все верные утверждения:
- а) базисные элементы линейно независимы;  
 б) базисные элементы линейно зависимы;  
 в) каждый элемент линейного пространства может быть разложен по заданному базису единственным способом;  
 г) при сложении любых двух элементов их координаты относительно любого базиса пространства перемножаются.
16. Выберите утверждения, являющиеся аксиомами нормы в евклидовом линейном пространстве:
- а)  $\|\bar{x}\| > 0$  при  $\bar{x} \neq 0$ ; б)  $(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$ ; в)  $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ .
17. Размерности ядра и базиса линейного оператора связаны соотношением:
- а)  $\dim \text{Ker } X = \dim \text{Im } X = \dim X = n$ ; б)  $\dim \text{Ker } X + \dim \text{Im } X = \dim X = n$ ; в)  $\dim \text{Im } X - \dim \text{Ker } X = \dim X$ .
18. Оператор поворота вокруг оси  $OY$  на  $45^\circ$  имеет вид:

$$а) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \quad б) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad в) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad г) \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Ключ 1 а),в),д);2 г);3 г);4 б);5 в),г);6 б);7 г);8 а);9 в);10 б);11 а);12 б),г);13 а);14 в);15 а),в);16 а),в);17 б);18 а)

### Информация о разработчиках

Беккерман Екатерина Николаевна, канд. физ.-мат. наук, кафедра информационных технологий в исследовании дискретных структур, доцент