

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:  
декан физического факультета  
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

**Численные методы небесной механики**

по направлению подготовки  
**03.04.02 Физика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**«Фундаментальная физика»**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Магистратура**

Год приема  
**2025**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
О.Н. Чайковская

Председатель УМК  
О.М. Сюсина

Томск — 2025

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ПК-1 – Способен самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего российского и зарубежного опыта;

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

– ИПК-1.1 – Знает основные стратегии исследований в выбранной области физики, критерии эффективности, ограничения применимости;

– ИПК-1.2 – Умеет выделять и систематизировать основные цели исследований в выбранной области физики, извлекать информацию из различных источников, включая периодическую печать и электронные коммуникации, представлять её в понятном виде и эффективно использовать.

## **2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Элементы текущего контроля:

- Практические задачи

Успешное выполнение практического задания является результатом освоения дисциплины по индикаторам ИПК-1.1. и ИПК-1.2. В практическом задании необходимо программно реализовать один из рассмотренных в лекциях методов численного интегрирования орбит 8-го порядка с постоянным шагом: явный метод Рунге–Кутты; коллокационный метод Рунге–Кутты на разбиении Гаусса–Лобатто; экстраполяционный метод Грэгга–Булирша–Штера; многошаговый метод Адамса–Мультона–Башфорта; геометрический метод Йошиды. Студенты должны написать код интегратора, провести тестирование и исследовать его эффективность в круговой задаче двух тел. Язык программирования выбирается по желанию студентов. Практическая задача считается выполненной, если программная процедура численного интегрирования (интегратор) прошла тестирование и полученные практические результаты отвечают теоретическим.

## **3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания**

Экзамены в первом и втором семестре проводятся в устной форме. В первом семестре студент допускается к экзамену, если он выполнил практическое задание. Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов по темам лекций. Продолжительность экзамена 1.5 часа. На экзаменах проверяются результаты освоения дисциплины по индикаторам ИПК-1.1. Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оцениваются ответы на два основных теоретических вопроса и ответы на дополнительные к ним вопросы. Баллы за ответ на вопрос: 5 — правильный; 4 — неполный; 3 — фрагментарный; 2 — отсутствует.

Оценка «отлично» выставляется, если общий балл — 19–20. Оценка «хорошо» выставляется, если общий балл — 16–18, причем среди оценок вопросов допускается одна оценка 3 при отсутствии оценок 2. Оценка «удовлетворительно» выставляется, если общий балл — 12–15, причем среди оценок вопросов допускается одна оценка 2. Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если среди оценок вопросов две оценки 2 и более.

Ответ на каждый теоретический вопрос должен содержать изложение идеи численного метода (или процесса), его теоретическую основу с указанием особенностей его практической реализации.

## Примеры вопросов к билетам

1. Численное моделирование орбитального движения
2. Метод разложения в ряд Тейлора
3. Явные методы Рунге–Кутты. Условия порядка
4. Оценка методической погрешности в методах Рунге–Кутты и выбор величины шага интегрирования
5. Экстраполяция Рунге–Кутты. Вложенные методы Рунге–Кутты
6. Неявные методы Рунге–Кутты. Коллокационные методы
7. Методы Гаусса. Метод Эверхарта
8. Экстраполяционные методы
9. Многошаговые методы Адамса и Гира
10. Реализация неявных методов. Схема предиктор–корректор
11. Линейные многошаговые методы. Условия порядка многошаговых методов
12. Оценка локальной погрешности в многошаговых методах. Формула Милна. Выбор величины шага интегрирования
13. Геометрические методы. Негеометричность методов Эйлера. Модифицированные методы Эйлера
14. Проекционный метод. Простые симплектические и симметричные методы
15. Метод Штермера–Верле. Методы Йошиды
16. Обратная задача орбитальной динамики. Модельные представления астрометрических наблюдений
17. Предварительное определение орбиты
18. Изохронные производные. Методы решения обратной задачи
19. Метод градиентного спуска. Метод Ньютона. Метод Гаусса–Ньютона
20. Метод Левенберга–Марквардта. Овражные методы
21. Задача наименьших квадратов, ее геометрия и доверительное оценивание
22. Стохастическое моделирование параметрической неопределенности
23. Показатели нелинейности обратной задачи

## 4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

### Теоретические вопросы (ИПК-1.1.)

1. Что представляет собой численная модель?
2. В чем недостаток метода разложения в ряд Тейлора для решения обыкновенных дифференциальных уравнений?
3. В чем состоит идея построения схем интегрирования методов Рунге–Кутты?
4. Алгоритм Рунге для оценивания погрешности численного интегрирования
5. В чем состоит особенность вложенных методов Рунге–Кутты?
6. В чем состоит особенность реализации неявных методов Рунге–Кутты?
7. Основная идея коллокационных методов Рунге–Кутты
8. Особенность методов Гаусса
9. В чем отличие коллокационных методов Рунге–Кутты и Эверхарта?
10. Идея экстраполяционных методов
11. Как строятся схемы интегрирования Адамса?
12. Какие методы называются геометрическими?
13. В чем суть проекционных методов?
14. Каким геометрическими свойствам дифференциальных уравнений отвечают симплектические и симметричные методы?
15. В чем состоит обратная задача орбитальной динамики?
16. Как вычисляются частные производные от модельных представлений наблюдений по параметрам модели, используемые в обратных задачах?

17. Какие численные методы решения обратной задачи Вы знаете?  
 18. Что такое доверительный эллипсоид и облако неопределенности?  
 19. Зачем нужны показатели нелинейности?

### Терминология (ИПК-1.1.)

#### А

аномалия истинная  
 аномалия средняя  
 аномалия эксцентрическая  
 аномалия эллиптическая  
 апоцентр  
 аргумент перицентра  
 аргумент широты  
 астрономическая единица

#### Б

большая полуось орбиты

#### В

вектор Лапласа  
 вектор динамического состояния  
 вектор момента количества движения  
 возмущение  
 время  
 время всемирное  
 время звездное  
 время среднее солнечное  
 время эфемеридное

#### Г

гравитационный параметр  
 гравитационный потенциал

#### Д

движение орбитальное  
 дисперсия ошибок  
 дифференциальные уравнения орбитального движения  
 дифференциальные уравнения канонические  
 доверительная область  
 долгота восходящего узла  
 долгота истинная  
 долгота перицентра  
 долгота средняя

#### З

задача Коши  
 задача двух тел  
 задача многих тел  
 задача наименьших квадратов  
 задача обратная

задача прямая

задача трех тел

задача трех тел ограниченная

законы Кеплера

законы Ньютона

#### И

интеграл Лапласа

интеграл площадей

интеграл энергии

#### Л

линия апсид

линия узлов

#### М

матрица Холецкого

матрица весовая

матрица идемпотентная

матрица ковариационная

матрица перехода

метод

Адамса

Адамса–Башфорта

Адамса–Мультона

Гаусса

Гаусса–Ньютона

Эверхарта

Гира

Грэгга–Булирша–Штера

Дормана–Принса

Инглэнда

Йошиды

Кахана–Ли

Куинлэна–Тремейна

Кунцмана–Бутчера

Левенберга–Марквардта

Монте-Карло

Ньютона

Рунге–Кутты

Тейлора

Штермера–Верле

Эйлера

бутстрэп

зашумленных наблюдений

геометрический

градиентного спуска

многошаговый  
овражный  
одношаговый  
оптимизации  
проекционный  
прыгающих лягушек  
симметричный  
симплектический  
экстраполяционный  
модель  
математическая  
численная

**Н**  
наклонение орбиты  
невязка

**О**  
облако неопределенности  
определение орбиты  
определение орбиты предварительное  
орбита  
кеплерова  
оскулирующая  
предварительная  
орбитальная неопределенность  
орбитальные элементы  
орбитальный период

**П**  
перигеум  
постоянная Гаусса  
постоянная Ньютона  
прямое восхождение

**С**  
склонение  
среднее движение

**Т**  
топоцентр

**У**  
узел орбиты  
уравнение Кеплера  
уравнение орбиты

**Ф**  
функция целевая

**Э**  
эксцентриситет орбиты  
элементы орбитальные  
эллипсоид ошибок  
энергия  
эпоха начальная  
эпоха стандартная  
эфемерида

### Тесты (ИПК-1.1.)

1. В чем главный недостаток метода разложения в ряд Тейлора для решения обыкновенных дифференциальных уравнений?

Варианты ответов:

- требуется объемные компьютерные вычисления;
- необходимость получения аналитических формул для производных от правой части дифференциальных уравнений по независимой переменной;
- менее точен, нежели другие методы того же порядка.

2. Каков максимальный порядок метода Рунге–Кутты, который равен числу его этапов?

Варианты ответов:

- 4;
- 5;
- 6.

3. В чем особенность вложенных методов Рунге–Кутты?

Варианты ответов:

- повышает устойчивость численного решения;
- повышает точность численного решения;
- позволяет оценивать локальную погрешность численного решения.

4. Каков порядок коллокационного метода Рунге–Кутты с равномерно распределенными восемью узловыми значениями?

Варианты ответов:

- a) 7;
- b) 8;
- c) 9.

5. В чем идея экстраполяционных методов?

Варианты ответов:

- a) по решениям, полученным каким-либо методом Рунге–Кутты с постоянными подшагами разной величины на основном шаге, выполняется экстраполяция для подшага нулевой величины;
- b) по решениям на предыдущих шагах выполняется экстраполяция решения на следующий шаг с последующим уточнением;
- c) по промежуточным решениям на текущем шаге метода Рунге–Кутты выполняется экстраполяция промежуточных решений на следующем шаге с последующим их уточнением.

6. Каков будет порядок схемы интегрирования явного метода Адамса, использующей 10 решений, полученных на предыдущих шагах?

Варианты ответов:

- a) 9;
- b) 10;
- c) 11.

7. Какой из методов Рунге–Кутты является симметричным?

Варианты ответов:

- a) метод Эйлера;
- b) классический метод Рунге–Кутты;
- c) неявный метод трапеций.

8. Задача наименьших квадратов состоит в минимизации ...

Варианты ответов:

- a) квадрата суммы невязок;
- b) суммы квадратов невязок;
- c) квадратов параметрических ошибок.

9. Какой из перечисленных методов используется для численного решения обратной задачи орбитальной динамики?

Варианты ответов:

- a) Гаусса–Ньютона;
- b) Гаусса–Жордана;
- c) Гаусса–Зейделя.

10. В линейных обратных задачах для определения доверительной области используется ...

...

Варианты ответов:

- a) стохастическая матрица;
- b) информационная матрица;
- c) ковариационная матрица.

Ключи: 1. b); 2. a); 3. c); 4. b); 5. a); 6. b); 7. c); 8. b); 9. a); 10. c).

### Задачи (ИПК-1.1., ИПК-1.2.)

1. Какой метод реализован в этом фрагменте программы?

```
do istep=1,nsteps
  call fun(t,x,f1)
  y=x+h*f1
  call fun(t+h,y,f2)
  x=x+h*(f1+f2)/2.e0
  t=t+h
end do
```

2. Какой алгоритм реализован в этом фрагменте программы?

```
do j=1,nc-1
  do i=j+1,nc
    dnm=(float(n(i))/float(n(i-j)))*2-1.e0
    g(i,j+1,:)=g(i,j,:)+(g(i,j,:)-g(i-1,j,:))/dnm
  end do
end do
```

3. В реализации какого метода используется этот фрагмент программы?

```
do i=1,nc

  h=hx/dfloat(n(i)); x0=x

  ! Euler Step

  x1=x0+h*f0; t1=t+h; j=0

  ! Midpoint Steps

  do
    call fun(t1,x1,f); nf=nf+1
    x2=x0+2.e0*h*f; j=j+1
    if(j==n(i)) exit
    t1=t1+h; x0=x1; x1=x2
  end do

  ! Weighted Average Solution

  y(i,1,:)=(x0+2.e0*x1+x2)/4d0

end do
```

4. Какая схема интегрирования реализуется в этом цикле?

```
do nsub=1,17
  hsub=h*gamma(nsub)
  hh=hsub/2.e0; th=t+hh
  xt(1:3)=x(1:3)+hh*x(4:6)
  call fun(th,xt,f); nf=nf+1
  x(4:6)=x(4:6)+hsub*f(4:6)
  x(1:3)=xt(1:3)+hh*x(4:6)
end do
```

```
t=t+hsub
end do
```

5. Какая схема интегрирования реализуется в этом фрагменте программы?

```
! Bashforth (predictor)
```

```
do i=0, nmo
  d(i, :)=f(nmo-i, :)
  do j=0, i-1
    d(i, :)=(d(i, :)-d(j, :))/(t(nmo-i)-t(nmo-j))
  end do
end do
```

```
xp=x
do i=0, nmo
  xp=xp+b(i)*d(i, :)
end do
xc=xp
```

```
call fun(t(n), xc, f(n, :)); nf=nf+1
```

```
! Moulton (corrector)
```

```
d(n, :)=f(n, :)
do j=0, nmo
  d(n, :)=(d(n, :)-d(j, :))/(t(n)-t(nmo-j))
end do
```

```
xc=xp+b(n)*d(n, :)
```

Ответы: 1. Метод Хойна; 2. Алгоритм Эйткена–Невилла; 3. Экстраполяционный метод Грэгга–Булирша–Штера; 4. Составная схема интегрирования Йошиды; 5. Многошаговая схема интегрирования Адамса–Мультона.

### Пояснение к задачам по синтаксису языка программирования Фортран

Присваивание  $a := b$

---

`a=b`

Элемент одномерного массива  $a$  с индексом  $i$

---

`a(i)`

Элемент двумерного массива  $a$  с индексами  $i$  и  $j$

---

`a(i, j)`

Функция  $f$  от переменной  $x$

---

`f(x)`

Вызов процедуры  $f$  с входными или выходными переменными (или массивами)  $x$  и  $y$

---

`call f(x, y)`

Цикл без условия

---

```
do  
<Тело цикла>  
end do
```

Цикл по параметру  $i = 1, \dots, n$

---

```
do i=1, n  
<Тело цикла>  
end do
```

Условный оператор

---

```
if (<Условие>) <Оператор>
```

Оператор выхода из цикла

---

### **Информация о разработчиках**

Авдюшев Виктор Анатольевич, д.ф.-м.н., Томский госуниверситет, профессор