

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан

Л. В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Комплексный анализ

по направлению подготовки / специальности

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Современная математика и математическое моделирование

Форма обучения

Очная

Квалификация

Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь

Год приема

2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Л.В. Гензе

Председатель УМК

Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- коллоквиум.

Пример заданий на контрольной по теме «Поле комплексных чисел» (РООПК-1.2)

1. Для указанной функции найти действительную и мнимую части $w = \bar{z} - iz^2$;
2. Записать комплексные числа в показательной форме: $1+i$;
3. Вычислить: $\operatorname{Ln}(-i)$;
4. Вычислить: 3^{2+i} ;
5. Решить уравнение: $\sin z = \pi i$.

Пример заданий на контрольной по теме «Комплексное отображение».

Найти образ области $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$ при отображении $w = \frac{1}{2} \left(e^z + \frac{1}{e^z} \right)$

Пример заданий на контрольной по теме «Теория Коши».

1. Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2 (ответ дать в алгебраической форме): $\int_C \bar{z} \operatorname{Re} z dz$, $C: y = x^2; z_1 = 0; z_2 = -1+i$.

2. Найти интеграл по контурам L_1, L_2, L_3 используя интегральную формулу Коши, теорему Коши:

$$\int_L \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)}, \text{ а) } L_1: |z-i|=1, \text{ б) } L_2: |z+1|=2, \text{ в) } L_3: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Пример заданий на контрольной по теме «Функциональные последовательности и ряды».

1. Вычислить интегралы при помощи вычетов:

$$\text{а) } \int_{\partial D} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad a > 0; \quad \text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x} dx$$

Пример заданий на контрольной по теме «Теория конформных отображений».

1. Найти конформное отображение области $\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 3, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3} \right\}$ на единичный круг.

2. Постройте пример последовательности f_n голоморфных и неоднолистных в D отображений, которая сходится к однолистной и голоморфной в D функции f .

Пример заданий на контрольной по теме «Аналитическое продолжение».

Выделить регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{z(2-z)}$, удовлетворяющую условию $f(1)=1$. Найти значение этой ветви функции f после ее аналитического продолжения вдоль верхней дуги окружности $|z-2|=1$ в точку $z=3$. Описать риманову поверхность функции.

Пример заданий на контрольной по теме «Теория мероморфных функций».

Найти область сходимости произведения $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$;

Доказать справедливость разложения $\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}$.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из трех частей.

Первая часть представляет собой теоретический обзорный вопрос (без доказательства), проверяющих ОПК-1.

Вторая часть содержит один теоретический вопрос, включающий теорему с доказательством, проверяющий ОПК-1. и РООПК-1.2.

Ответы на вопросы первой и второй частей даются в развернутой форме.

Третья часть содержит практическую типовую задачу, проверяющую РООПК-1.1. и РООПК-1.3. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов.

Перечень теоретических вопросов:

1. Поле комплексных чисел.
2. Сфера Римана. Топология $\mathbb{C}$ и $\bar{\mathbb{C}}$.
3. Траектория, кривая.
4. Интеграл по кривой. Свойства. Оценка.
5. $\mathbb{R}$ -дифференцируемость, $\mathbb{C}$ -дифференцируемость. Теорема о связи $\mathbb{C}$ -дифф., $\mathbb{R}$ -дифф. И существовании производной.
6. Конформность. Теорема о связи конформности и $\mathbb{C}$ -дифференцируемости.
7. Основные элементарные отображения.
8. Лемма Гурса.
9. Интегральная теорема Коши (обзор).
10. Интеграл Коши. Теорема о голоморфности интеграла Коши.
11. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем.

12. Бесконечная дифференцируемость голоморфной функции. Теорема Лиувилля. Теорема о существовании первообразной. Теорема Мореры. Теорема Ньютона-Лебница (обзор).
13. Теорема Вейерштрасса о голоморфности предельной функции, о голоморфности суммы ряда. Ряд Тейлора (обзор).
14. Теорема Абеля.
15. Теорема Лорана.
16. Изолированные особые точки однозначного характера. Нули функции. Теорема о связи между полюсом и нулем. Теорема Сохоцкого.
17. Теорема о разности между числом нулей и полюсов. Основная теорема алгебры многочленов.
18. Вычет. Вычисление вычетов.
19. Теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме всех вычетов.
20. Принцип единственности.
21. Принцип максимума.
22. Принцип аргумента.
23. Принцип симметрии Римана-Шварца.
24. Принцип компактности Мотеля.
25. Теорема Руше. Теорема о локальной однолистности.
26. Теорема Гурвица. Принцип сохранения области.
27. Теорема Римана.
28. Лемма Шварца. Нормировка.
29. Отображения на многоугольники.
30. Аналитическое продолжение.
31. Полная аналитическая функция. Риманова поверхность.
32. Гармонические функции.
33. Задача Дирихле.
34. Связь комплексного потенциала и гармонических функций. Примеры.
35. Теорема Миттаг-Леффлера.
36. Разложение целых функций на бесконечные произведения.

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если обзорный вопрос раскрыт в полной мере, на вопрос с доказательством теоремы дан развернутый ответ и все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если имеются пробелы в ответе на теоретический вопрос и неточности в доказательстве или не грубые ошибки в решении задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если имеются существенные пробелы в ответе на теоретический вопрос, структура доказательства неполная или имеются грубые ошибки в решении задачи.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не решена задача или отсутствует один из ответов на теоретический вопрос, либо ответы на теоретические вопросы имеют существенные пробелы.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Вопросы для оценивания остаточных знаний (РООПК 1.3):

1. Основные формы записи комплексного числа.
2. Записать в аналитическом виде окрестность конечной точки и окрестность бесконечности.
3. Геометрические свойства конформного отображения.
4. Примеры однолистных и не однолистных отображений.
5. Суть интегральной теоремы Коши.
6. Интегральная формула Коши.
7. Голоморфное отображение и особые точки.
8. Ряд Лорана ряд Тейлора.
9. Вычет, вычисление и применение вычетов.
10. Основные принципы.
11. Аналитическое продолжение на примерах.
12. Связь между голоморфным отображением и гармонической функцией.
13. Теорема Римана.
14. Основные элементарные отображения.

Задачи (РООПК 1.1):

1. Найти действительную и мнимую части, модуль и аргумент комплексного числа $z = \frac{1+3i}{-1+4i}$.
2. Вычислить: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$
3. Найти все значения корня $\sqrt{2i}$
4. Изобразить множество точек плоскости, удовлетворяющих системе неравенств $|z| < 1$ и $|z+1| \leq 1$
5. Найти все изолированные особые точки функции $f(z) = \frac{z+2}{z^2(z+i)}$
6. Вычислить интеграл при помощи вычетов: $\int_{\gamma} \frac{2dz}{z^2(z+1)}$, если $\gamma: |z-i|=3$

Информация о разработчиках

Колесников Иван Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Копанев Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Садритдинова Гулнора Долимджановна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ